Vom Sinn der Dgl.

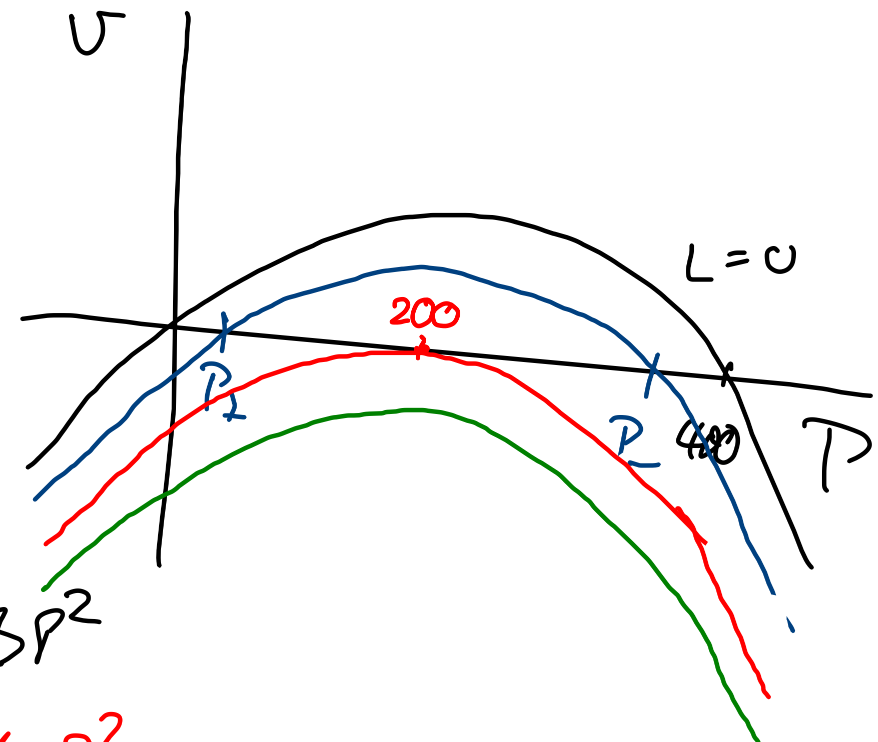
Bsp ÜA 47 Bl. 11: Fischpopulation

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - \beta P^2 - 5L = v(P)$$

α = Geburten - Sterberate

β = Konkurrenz

L = Ernte



$L=0$: $\alpha P - \beta P^2$

$L = 80$ $\alpha P - \beta P^2 - 5L$

Nutzen der Dgl.:

1) Vorhersage

2) qualitatives Verhalten, Mechanismen untersuchen.

Lineare Dgl.

(1) $$\frac{d^r \underline{x}}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{x}}{dt^k} + \underline{b}(t)$$

L_i = Lösungsmenge (d.h. für alle Anfangswerte) ist affiner Unterraum von $C^r(I, \mathbb{R}^n)$

L_h = Lösungsmenge des zugeh. homogenen Problems (d.h. $\underline{b} = 0$) ist Unterraum von $C^r(I, \mathbb{R}^n)$

$L_i = x_{\text{spez. inhom}} + L_h$

<u>Prop</u> $\dim L_i = \dim L_h = nr.$

<u>Bsp</u> $n=1$, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x + \sin t$

angetriebener harm. Osz.

$$L_h = \{ t \mapsto a \cos \omega t + b \sin \omega t \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

z.B. $x_{\text{spez. inhom}}(t) = \frac{\sin t}{\omega^2 - 1}$

ist Lsg., denn li. Seite $= -\frac{1}{\omega^2-1} \sin t$

re. Seite $= \left(\cancel{-\frac{\omega^2}{\omega^2-1}} + \frac{\cancel{\omega^2-1}}{\omega^2-1} \right) \sin t$ ✓

also $L_i = \left\{ t \mapsto \frac{\sin t}{\omega^2-1} + a \cos \omega t + b \sin \omega t \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

systematische Verfahren zum Finden von $x_{spez. inhom}$:

- Dyson-Reihe (M_0)
- Variation der Konstanten (M_0).

Matrix-Exponential

benötigt für $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$

<u>Df</u> $e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \qquad \forall B \in M_n(\mathbb{C})$

<u>Bsp</u> $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$, $B^3 = B(-E) = -B$, $B^4 = E$,

$B^5 = B$, $B^6 = -E$, $B^7 = -B$, $B^8 = E$, ..., $B^k = \begin{cases} E & k \equiv 0 (4) \\ B & k \equiv 1 (4) \\ -E & 2 \\ -B & 3 \end{cases}$

$$e^{Bt} = \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k!} (-1)^{k/2} t^k E + \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k!} (-1)^{\frac{k-1}{2}} t^k B$$

$$= \cos(t) \quad E + \sin(t) \quad B$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$\underline{x}(t) = e^{Bt} \underline{x}_0$ ist Lsg von $\dot{\underline{x}} = B\underline{x}$, also $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$

<u>Bsp</u> $B = \operatorname{diag}(b_1 \dots b_n) = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$

$$B^k = \begin{pmatrix} b_1^k & & & \\ & b_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n^k \end{pmatrix}, \quad e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} b_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & b_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{1}{k!} b_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum \frac{1}{k!} b_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{b_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{b_n} \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Finde e^B für $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort: $e^B = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\ E + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall k > 1$$

Funktionalgl. Wenn $AB = BA$, dann $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Bsp $A = \cancel{\text{diag}} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$ kommutieren

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} e^{a_1+b_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n+b_n} \end{pmatrix}, \quad e^A e^B = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{b_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{b_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{a_1} e^{b_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n} e^{b_n} \end{pmatrix}.$$

Bsp Voraussetzung nicht verzichtbar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB,$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & \\ & \cancel{\tfrac{1}{e}}\, e^{-t} \end{pmatrix}, \quad e^{Bt} = E + Bt, \quad e^{At} e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$e^{Bt} e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$e^{(A+B)t} = \begin{pmatrix} e^t & \sinh t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A+B)^2 = E, \quad (A+B)^3 = A+B, \quad (A+B)^k = \begin{cases} E & k \text{ gerade} \\ A+B & k \text{ unger.} \end{cases}$$

$$e^{(A+B)t} = \sum_{k \text{ gerade}} \frac{t^k}{k!} E + \sum_{k \text{ unger.}} \frac{t^k}{k!} (A+B)$$

$$= \cosh(t)\, E + \sinh(t)\, (A+B)$$

$$\boxed{\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}}$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass e^{At} $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $\forall t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist, und finden Sie die Inverse.

Antwort $e^{-At} e^{At} = e^{-At+At} = e^0 = E$

$(-At) At = -A^2 t = At(-At)$, Funktionalgl. $\square$

Folgerung aus der Funktionalgl.: $e^{At} = \left(e^{\frac{At}{N}}\right)^N$

Für h nahe 0 (genauer $|h| \ll \frac{1}{\|A\|}$)

ist $e^{Ah} \simeq E + Ah$,

also $e^{At} \approx \left(E + \frac{At}{N}\right)^N$ für große N.

Bericht $e^{At} = \lim\limits_{N \to \infty} \left(E + \frac{At}{N}\right)^N$ tatsächlich.

Ableitung

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

Heuristik: Für h nahe 0 ist

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \overset{\text{Funktionalgl.}}{=} e^{At} \, \frac{\overbrace{e^{Ah}}^{\approx E + Ah} - E}{h}$$

$$\approx e^{At} \, \frac{A\cancel{h}}{\cancel{h}} = e^{At} A .$$