Lineare DGl.en

$$\underline{\dot{x}} = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$$

autonom und homogen: $\underline{b} = 0$, $A(t) = A$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \cancel{\cdot}\; e^{At}\underline{x}_0 .$$

nicht-autonom: $A(t)$

Dyson-Reihe

Wollen $\underline{\dot{x}} = A(t)\underline{x}$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

Propagator $\underline{\Phi}(t)$

$$\underline{\Phi}(t_0) = E_n = 1$$

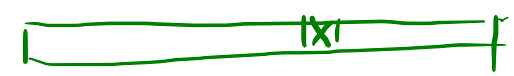
$\underline{x}(t_0+dt) \approx \underline{x}_0 + A(t_0)\underline{x}_0\,dt$, d.h. $\underline{\Phi}(t_0+dt) \approx 1 + A(t_0)\,dt$

$$\underline{x}(t_0+2dt) \approx \left(1 + A(t_0+dt)\,dt\right)\underline{x}(t_0+dt)$$
$$\approx \left(1 + A(t_0+dt)\,dt\right)\left(1 + A(t_0)\,dt\right)\underline{x}_0 .$$

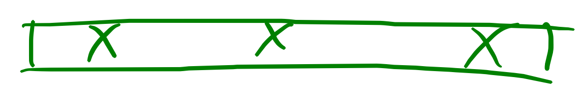
$$\Phi(t_0 + r\,dt) = \left(1 + A(t_0 + \overset{(r-1)}{\cancel{r}}\,dt)\,dt\right) \cdots \left(1 + A(t_0 + 2dt)\,dt\right)\left(1 + A(t_0 + dt)\,dt\right)\left(1 + A(t_0)\,dt\right)\cancel{x_0}$$

$$= \prod_{k=r-1}^{0} \left(1 + A_k\,dt\right) \qquad \left[A_k := A(t_0 + k\,dt)\right]$$

$$= 1 + \sum_{k=r-1}^{0} A_k\,dt$$



$$+ \sum_{k_1=r-1}^{1} \sum_{k_2=k_1-1}^{0} A_{k_1}\,dt\,A_{k_2}\,dt$$



$$+ \sum_{k_1=r-1}^{2} \sum_{k_2=k_1-1}^{1} \sum_{k_3=k_2-1}^{0} A_{k_1}\,dt\,A_{k_2}\,dt\,A_{k_3}\,dt$$

$$+ \cdots$$

$$\Phi(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \quad A(\tau_1)\, A(\tau_2)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_3 \; A(\tau_1)\, A(\tau_2)\, A(\tau_3)$$

$$+ \ldots$$

Dyson-Reihe, Freeman Dyson (1923-2020)

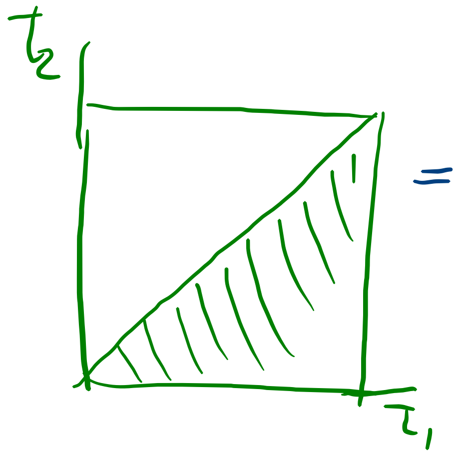
<u>Bem</u> Falls $A(t)\, A(t') = A(t')\, A(t) \quad \forall t, t'$

dann $\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} d\tau\, A(\tau)}$

<u>Bew</u> r. S. $= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^{t} d\tau\, A(\tau) \right)^k =$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{t} d\tau_k \underbrace{A(\tau_1) \cdots A(\tau_k)}_{\text{sortiere so, dass}}$$

$\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_k$.



$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k!} \int_{\substack{\underline{\tau} \in [t_0, t]^k \\ \tau_1 > \tau_2 > \dots \tau_k}} d\tau_1 \cdots d\tau_k \quad A(\tau_1) \cdots A(\tau_k)$$

$=$ Dyson-Reihe

Variation der Konstanten

Methode zum Lösen von <u>inhom.</u> lin. Dgl.en

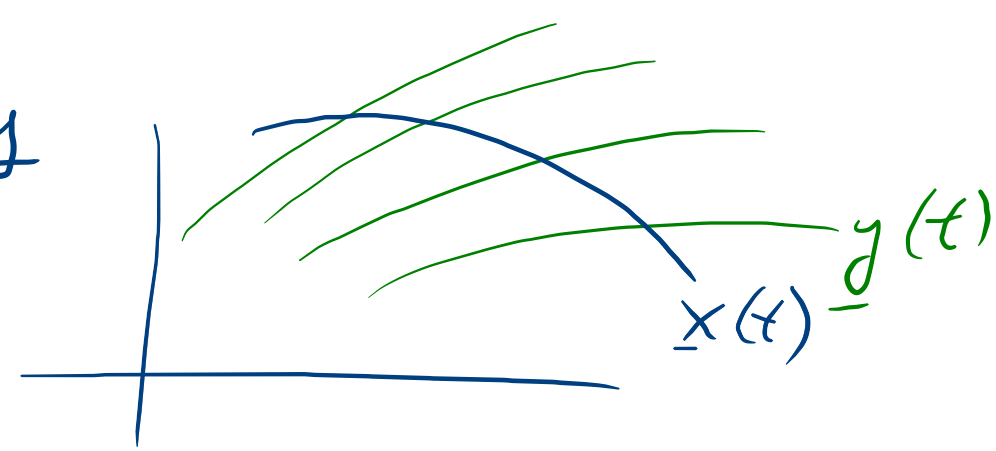
$$\underline{\dot{x}} = A(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t), \qquad (1)$$

wenn wir das hom. Problem

$$\underline{\dot{y}} = A(t)\,\underline{y} \qquad (2)$$

schon gelöst haben, d.h. den Propagator $\Phi(t)$ kennen.

<u>Anschauung</u>



$\underline{x}$ wechselt ständig von einer Bahn $\underline{y}$ auf eine andere

$$\underline{y}(t) = \Phi(t)\,\underline{c}$$

$\underline{c}$ = Vektor der Koeff. ~~der~~ für die Spalten von $\Phi(t)$

Schreibe $\underline{x}(t)$ als $\quad \underline{x}(t) = \Phi(t)\,\underline{c}(t)$

$$\Rightarrow \quad \underline{\dot{x}}(t) = \underbrace{\dot{\Phi}(t)}_{A(t)\,\Phi(t)}\,\underline{c}(t) + \Phi(t)\,\underline{\dot{c}}(t) = A(t)\,\underline{x}(t) + \Phi(t)\,\underline{\dot{c}}(t)$$

Wollen $\dot{\underline{x}} = A(t)\,\underline{x}(t) + \underline{b}(t)$

$\Longleftrightarrow \quad \underline{b}(t) = \underline{\Phi}(t)\,\dot{\underline{c}}(t)$

$\Longleftrightarrow \quad \dot{\underline{c}}(t) = \underline{\Phi}(t)^{-1}\,\underline{b}(t)$

$$\Longrightarrow \quad \underline{c}(t) = \underline{c}(t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tau\, \underline{\Phi}(\tau)^{-1}\,\underline{b}(\tau)$$

$\Longrightarrow$ Satz 9.8(b)

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\left(\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} d\tau\, \underline{\Phi}(\tau)^{-1}\,\underline{b}(\tau)\right)$$

$$= \underline{\Phi}(t)\,\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} d\tau\, \underbrace{\underline{\Phi}(t,\tau)}_{\text{von } \tau \text{ nach } t}\,\underline{b}(\tau)$$

Bsp 9.11 $n=1$

$$(3)\quad \begin{cases} \dot{x} = 2tx + t^3 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$t_0 = 0,\ a(t) = 2t,\ b(t) = t^3$

hom. Gl.

$$(4)\qquad \dot{y} = 2ty.$$

- Löse (4). 2 Wege:

a) Dyson-Reihe. $n=1 \Rightarrow a(t)\,a(t') = a(t')\,a(t)$.

$$\Rightarrow y(t) = e^{\int_0^t d\tau\, a(\tau)}\, y_0$$

Hier $a(t) = 2t \Rightarrow \int_0^t d\tau\, a(\tau) = t^2$

also $y(t) = e^{t^2} y_0$

b) Sep. der Var.

$$\ln \frac{y(T)}{y_0} = \int_{y_0}^{y(T)} \frac{dy}{y} = \int_0^T a(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad y(T) = y_0 \, e^{\int_0^T dt\, a(t)}$$

$$\text{hier } y(t) = e^{-t^2} y_0 \, .$$

- Var. der Konst.

$$x(t) = e^{-t^2}\left(x_0 + \int_0^t d\tau \; e^{-\tau^2} \underbrace{\tau^3}_{b(\tau)} \right)$$

$$\int_0^t d\tau \; e^{-\tau^2} \tau^3 \underset{\substack{u=\tau^2 \\ du = 2\tau d\tau}}{\overset{\text{Subst.}}{=}} \frac{1}{2} \int_0^{t^2} du \;\; u \, e^{-u}$$

$$\overset{\text{part. Int}}{=} \left[-\frac{1}{2} e^{-u} u \right]_0^{t^2} - \frac{1}{2} \int_0^{t^2} du \; \left(- e^{-u}\right)$$

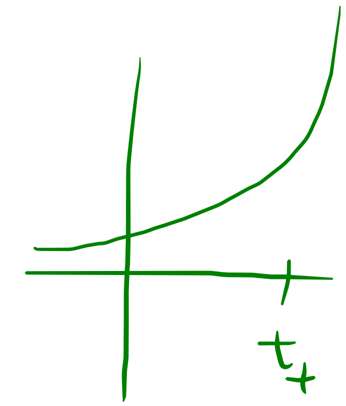
$$= -\frac{1}{2} t^2 e^{-t^2} - \frac{1}{2} e^{-t^2} + \frac{1}{2} \cancel{e^0}$$

Also $\underline{x(t) = e^{t^2} x_0 - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{t^2}}$. allg. Lsg von (3) ,

globale Ex. bei lin. Dgl.en

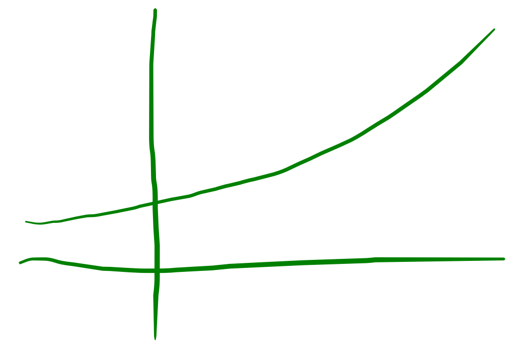
Anschauung: Vgl. $\dot{x} = x^2$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{t_+ - t}$$



mit $\dot{x} = ax$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 e^{at}$$



und $\dot{x} = a(t)\, x$

mit $\dot{x} = ax$

für $a = \max\limits_{t_0 \le t \le t_1} a(t)$

genügt für Ordg 1:

Satz 9.3 Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

$A : I \to M_n(\mathbb{R})$ st., $b : I \to \mathbb{R}^n$ st.

Dann ex. zu jedem $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine (eind.) Lsg $\underline{x} : I \to \mathbb{R}^n$ (globale Lsg) von

$$(1) \begin{cases} \underline{\dot{x}} = A(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}.$$

Bew nicht-autonomer Satz von Picard-Lindelöf

$\Rightarrow \forall t_0 \in I \; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \; \exists_1$ max. Lsg von (1)

$\underline{x} : J \to \mathbb{R}^n$, $J = (s_-, s_+) \subset I = (t_-, t_+)$

z.z. $s_+ = t_+$ (analog dann $s_- = t_-$), also $J = I$.

Wäre $s_+ < t_+$, dann müsste nach Satz 8.22 $\underline{x}$ jedes Kompaktum in $\mathbb{R}^n$ verlassen, also

$\|\underline{x}(t)\| \xrightarrow{t \to s_+} \infty$. Wir zeigen aber, dass $\|\underline{x}(t)\|$ beschr.

Setze $L := \max\{\|A(t)\| \mid t_0 \le t \le s_+\}$

$M := \max\{\|\underline{b}(t)\| \mid t_0 \le t \le s_+\}$

$u(t) := \|\underline{x}(t)\|$, $\quad u : [t_0, s_+) \longrightarrow [0, \infty)$ st.

Dann
$$
\begin{aligned}
u(t) &= \|\underline{x}(t)\| \\
&= \Big\| \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} ds\, \dot{\underline{x}}(s) \Big\| \\
&\le \|\underline{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} ds\, \|\underbrace{\dot{\underline{x}}(s)}_{A(s)\underline{x}(s) + \underline{b}(s)}\| \\
&\le \underbrace{\|\underline{x}_0\| + \int_{t_0}^{\overset{s_+}{\cancel{t}}} ds\, \overbrace{\|\underline{b}(s)\|}^{M}} + \int_{t_0}^{t} ds\, \underbrace{\|A(s)\|}_{\le L}\, \underbrace{\|\underline{x}(s)\|}_{u(s)} \\
&\le C + L \int_{t_0}^{t} ds\, u(s)
\end{aligned}
$$

Lemma von Grönwall 9.4

Sei $a<b$, $u:[a,b]\to[0,\infty)$ st.

Wenn $\exists L, C \geq 0$ $\forall t\in[a,b]$:

$$u(t) \leq C + L\int_{a}^{t} u(s)\,ds,$$

dann $u(t) \leq C e^{L(t-a)}$ $\forall t\in[a,b]$.

Insbes. wenn $\dot{u} \leq L u$ und $u(a) = C$,

dann $u(t) \leq C e^{L(t-a)}$

Forts. Bew. 9.3

Also $u(t) \leq C e^{L(t-t_0)} \leq C e^{L(s_+ - t_0)}$ $\forall t_0 \leq t < s_+$,

also $t \mapsto \|\underline{x}(t)\|$ beschr. auf $[t_0, s_+)$ $\lightning$. $\square$