Methoden für lineare DGL

1. $x_{\text{allg inhom}} = x_{\text{spez inhom}} + x_{\text{allg hom}}$

2. Auffinden $x_{\text{spez. inhom}}$: Variation der Konstanten

3. Auffinden von $x_{\text{all hom}}$: reicht Fundamentalsystem

   a) konst. Koeff. $n=1$: Exponential-Ansatz
   $e^{\lambda t}, \; t e^{\lambda t}, \; t^2 e^{\lambda t}$

   b) konst. Koeff. Ordg 1: Matrix-Exponential

   c) Ordg 1, kommutierende Koeff. $A(t)$: $\Phi(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}$

   d) Ordg 1 : Dyson-Reihe $\Phi(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \, A(t_1) A(t_2) \cdots A(t_k)$

Bspe für lineare DGL

PDE

- Schrödinger-gl.
- D'Alembert-gl. = Wellengl. $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
- Maxwell-gl. (Elektromagnetismus)
- Wärmeleitungsgl. = Diffusions-gl. $\frac{\partial f}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

ODEs

- Schwingungen (kleiner Amplitude)
- elektrische Schaltkreise

Nichtlineare PDEs:

- Korteweg-de Vries-gl. (Wasserwellen bei geringer Tiefe)
- Einstein-gl. (Gravitationsfeld in der allg. Rel. Th.)
- Navier-Stokes-gl.en (Strömung von Gasen oder Flüssigkeiten)

Methoden für nichtlineare ODEs

1. Separation der Variablen für $n=1$, Ordg 1

$$f(t,x) = a(t)\, b(x)$$

Bsp $\quad \frac{dx}{dt} = t x^2, \quad x(0) = x_0 \neq 0.$

Lsg
$$\underbrace{\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^2}}_{-\frac{1}{x(T)} + \frac{1}{x(0)}} = \int_0^T dt\, t = \frac{T^2}{2} \implies x(T) = \frac{1}{C - T^2/2}$$

auf $I = (-\sqrt{2C}, \sqrt{2C})$

$$c = \frac{1}{x(0)}$$

$x_0 = 0: \quad x(T) = 0 \quad \forall T$

2. Potenzreihenansatz

Bsp $\quad \frac{dx}{dt} = t^2 x \qquad (*)$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} c_k\, k\, t^{k-1}$$

$$(\cancel{*}) \underset{\substack{m=k-1 \\ m=k+2}}{\Longrightarrow} \sum_{m=\cancel{1}\,0}^{\infty} c_{m+1}(m+1)\,t^{m} = \sum_{\substack{\cancel{k}=0 \\ m=2}}^{\infty} \underset{m-2}{\cancel{c_k}}\; t^{\overset{m}{\cancel{k+2}}}$$

Koeff. Vergl.

$$\begin{aligned} &c_0 \text{ bel.} \\ c_1 &= 0 \\ 2c_2 &= 0 \\ c_{m+1}\cancel{(m+1)} &= \frac{c_{m-2}}{m+1} \quad \text{für } m \geq 2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow c_3 = \frac{c_0}{3},\quad c_4 = 0,\quad c_5 = 0$$

$$c_6 = \frac{c_3}{6} = \frac{c_0}{3 \cdot 6},\quad c_7 = 0,\quad c_8 = 0$$

$$c_9 = \frac{c_0}{3 \cdot 6 \cdot 9} \qquad c_{10} = 0,\quad c_{11} = 0$$

$$\Longrightarrow x(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty}{}^{k=3\ell}\; c_{3\ell}\, t^{3\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{c_0}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3\ell)}\, t^{3\ell}$$

$$= c_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!\, 3^\ell} (t^3)^\ell = c_0\, e^{t^3/3}$$

3. Berechnung unparametrisierter Trajektorien

a) durch Erhaltungsgrößen

<u>Bsp</u> $E(x(t), y(t)) = \text{const.} = E_0$

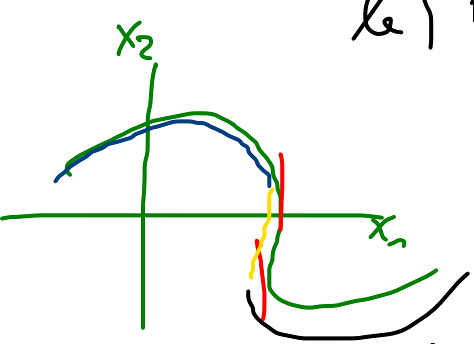
implizite Fkt $E(x, g(x)) = E_0$

$\Rightarrow y(t) = g(x(t))$ (s. Vorl. beim ebenen Pendel)

b) wenn

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2(x_1, x_2), \text{ dann } \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{v_1(x_1, x_2)}{v_2(x_1, x_2)},$$



was sich evtl. lösen lässt. $\rightsquigarrow x_1(x_2)$

c) manchmal auch wünschenswert, wenn $x(t)$ bekannt (s. Vorl. bei e^{At})

Variation der Konstanten

geg. Propagator $\Phi(t)$ (Flussabb. der hom. lin. DGL)

ges. Lsg der inhom. DGL, $\underline{b}(t)$ zeitabh.

<u>Bsp</u> $\frac{dx}{dt} = x + 1$, $\quad b(t) = 1$, $\quad n = 1$, $\quad A(t) = 1$

hom. DGL: $\quad \dot{y} = y$

Lsg $\quad y(t) = y_0 e^t \qquad (t_0 = 0)$

Propagator $\Phi(t) = e^t$

Var. der Konst.: Ansatz $x(t) = \Phi(t)\, c(t)$

in DGL $\Rightarrow \quad \dot{x} = \underbrace{\dot{\Phi}}_{A(t)\,\Phi(t)} c(t) + \Phi\, \dot{c} = A(t)\, x(t) + \Phi(t)\, \dot{c}(t)$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{\Phi(t)}\, \dot{c}(t) = \overset{\Phi^{-1}(t)}{b(t)} \quad \Rightarrow \quad c(t) = c(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds$$

Hier $c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-s}\, 1 \, ds$

$$= c(0) - e^{-t} + 1$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \Phi(t)\, c(t) = e^t c(0) - 1 + e^t$$

$$x_0 = x(0) = c(0) - 1 + 1 = c(0)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^t x_0 - 1 + e^t .$$

$$\left(\text{Probe: } \dot{x} = e^t x_0 + e^t = x + 1 . \right)$$

Matrix-Exponential: Praktische Berechnung

1) durch Diagonalisierung von $A \in M_n(\mathbb{K})$

Falls A symmetrisch $(A = A^T)$ $\overset{\text{Spektralsatz}}{\Longrightarrow}$ reell diagbar durch ONB.
(Basisvektoren = EVen)

Falls A Hermitesch $(A = \bar{A}^T)$, orthogonal $(AA^T = E)$, unitär $(A\bar{A}^T = E)$ $\Longrightarrow$ komplex diagbar durch ONB.

Falls A n versch. reelle EWe hat $\Rightarrow$ reell diagbar.

Falls A n versch. komplexe EWe hat $\Rightarrow$ komplex diagbar.

Falls A diagbar, $A = SDS^{-1}$

$D = \operatorname{diag}(d_1 \dots d_n)$

Spalten von S = EVen von A, und

$$\boxed{e^{At} = S e^{Dt} S^{-1}}$$

Bsp $\ddot{x} = -x$ (harm. Osz. mit $\omega = 1$)

Red. auf 1. Ordg: $v = \dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{A \text{ (orthogonal)}} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i) \Rightarrow \text{EWe} = \pm i.$$

$\cancel{A = SDS^T}$

EVen: $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$A = SDS^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}_{S \text{ (unitär)}} \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & +i \end{pmatrix}}_{S^{-1} = \bar{S}^T}$$

$$e^{At} = S e^{Dt} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{pmatrix} \bar{S}^T = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

also $x(t) = x(0)\cos t + v(0)\sin t$.

2) A nicht diagbar:

durch Jordansche Normalform (Montag)

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}\lambda_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_2\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}\lambda_3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_3\end{matrix} \end{array}\right)$$

tritt ein, wenn P_A mehrfache NST hat (alg. Vielfachheit) und

geom. Vielfachheit < alg. Vielfachheit.

dim ER