Matrix-Exponential: Praktische Berechnung

1) $A \in M_n(\mathbb{C})$, komplex diag'bar,

$A = S D S^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(d_1 \dots d_n)$

$$\Rightarrow e^{At} = S e^{Dt} S^{-1}, \quad e^{Dt} = \mathrm{diag}(e^{d_1 t}, \dots, e^{d_n t})$$

2) Falls A nicht komplex diag'bar:

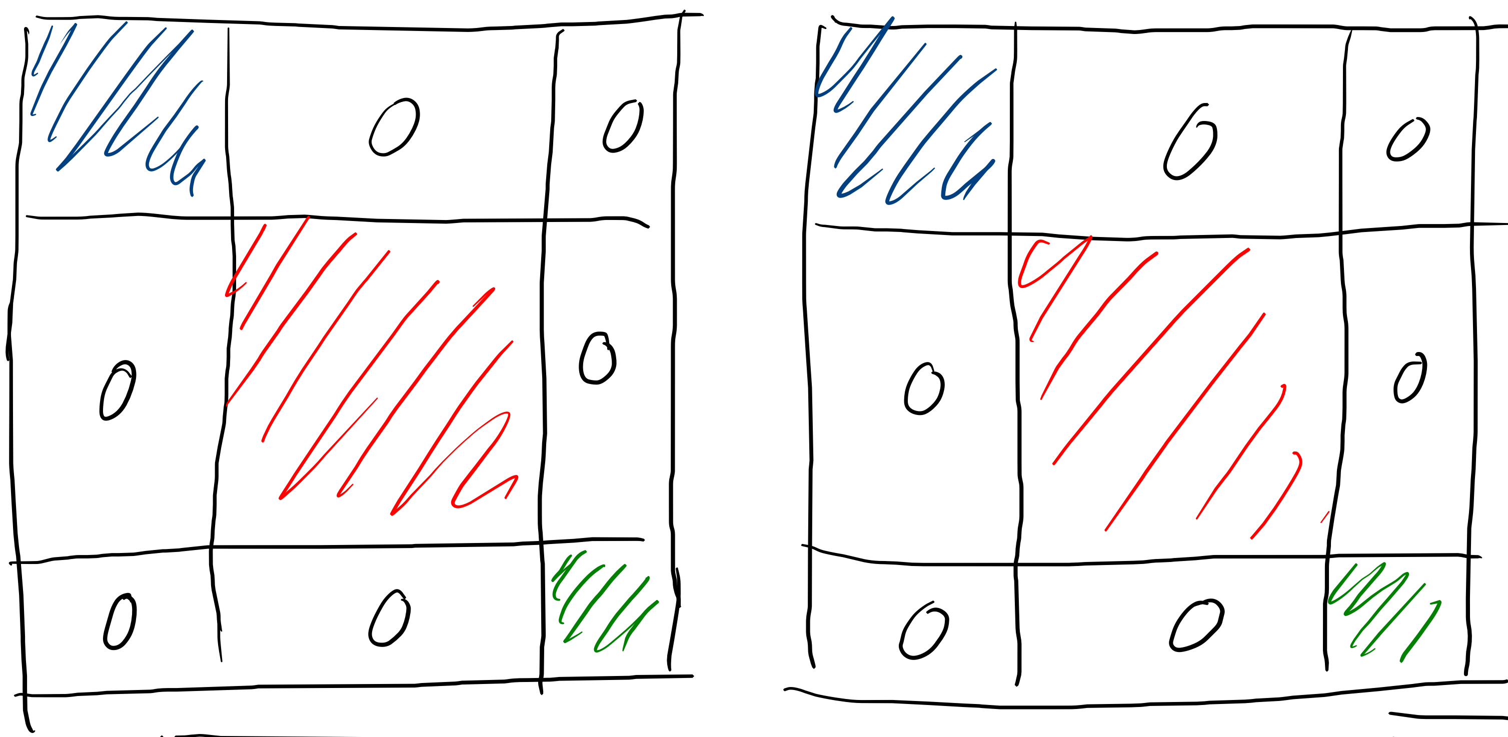
Jordan-Normalform in $\mathbb{C}^n$: $A = S J S^{-1}$

$$\Rightarrow e^{At} = S e^{Jt} S^{-1}.$$

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \lambda_1 & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{matrix} & 0 & & \\ \hline
0 & \begin{matrix} \lambda_2 & 1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ \hline
 & & \lambda_3 \ddots & \\ \hline
 & & & \lambda_4 \ddots
\end{array}\right]$$

block-diagonal

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}\lambda_2 & 1 & & \\ & \lambda_2 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_2\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}\lambda_3 & 1 \\ & \lambda_3\end{matrix}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & J_2 & \\ \hline & & J_3\end{array}\right)$$



$$J^k = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_2^k & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_3^k\end{array}\right) \Rightarrow e^{Jt} = \left(\begin{array}{c|c|c} e^{J_1 t} & & \\ \hline & e^{J_2 t} & \\ \hline & & e^{J_3 t}\end{array}\right)$$

Bsp $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, d.h. $\underline{\dot{y}} = J\,\underline{y}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 2y_2$$

$$\Rightarrow \quad y_2(t) = y_{02}\, e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + e^{2t} y_{02}$$

hom: $\dfrac{du}{dt} = 2u \Rightarrow u(t) = e^{2t} u_0$

Var. der Konst: $y_1(t) = e^{2t} u_0(t)$

$$\Rightarrow \dot{y}_1(t) = 2e^{2t} u_0(t) + e^{2t} \dot{u}_0(t)$$

DGL $\Leftrightarrow \cancel{2e^{2t} u_0(t)} + \cancel{e^{2t}}\, \dot{u}_0(t) = \cancel{2e^{2t} u_0(t)} + \cancel{e^{2t}}\, y_{02}$

$$\Rightarrow u_0(t) = y_{02}\, t + u_{00}$$

$$\Rightarrow \quad y_1(t) = t e^{2t} y_{02} + e^{2t} u_{00}$$

$$\text{AW} \quad y_1(0) = u_{00} = y_{01}$$

$$\text{Also} \quad \underline{y}(t) = \begin{pmatrix} t e^{2t} y_{02} + e^{2t} y_{01} \\ e^{2t} y_{02} \end{pmatrix} = e^{Jt} \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}$$

$$\text{Also} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{Allg.} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{y}} = J \underline{y}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda y_2 + y_3 \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \lambda y_n \end{aligned} \right\} \qquad y_n(t) = e^{\lambda t} y_{0n}$$

$$\Rightarrow \text{löse } \frac{dy_{n-1}}{dt} = \lambda y_{n-1} + e^{\lambda t} y_{0n}$$

etc.

Anderer Lösungsweg für $e^{Jt} = ?$

$J = \lambda E + N$, $\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$(\lambda E) N = N (\lambda E) \Rightarrow e^{Jt} = e^{\lambda Et + Nt} = e^{\lambda Et} e^{Nt}$

$= e^{\lambda t} e^{Nt}$

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $\quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ & & & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$N^k = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ with the last k entries of the final column marked by a brace labelled k.

$n \times n$

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^4}{4!} & \cdots & \boxed{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \ddots & \vdots \\ & & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ddots & \frac{t^4}{4!} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^3}{3!} \\ & & & & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & & & & & 1 & t \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

__Bsp__ $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

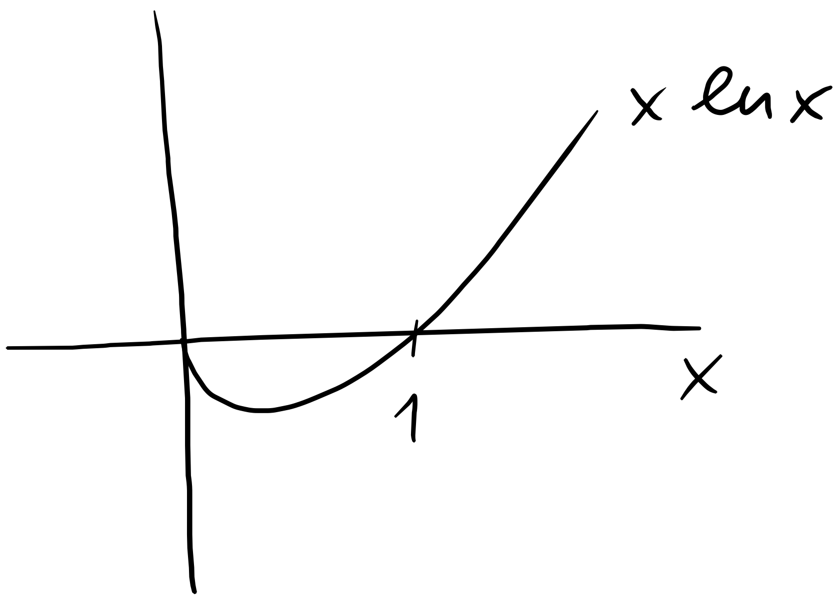
$$e^{Jt} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

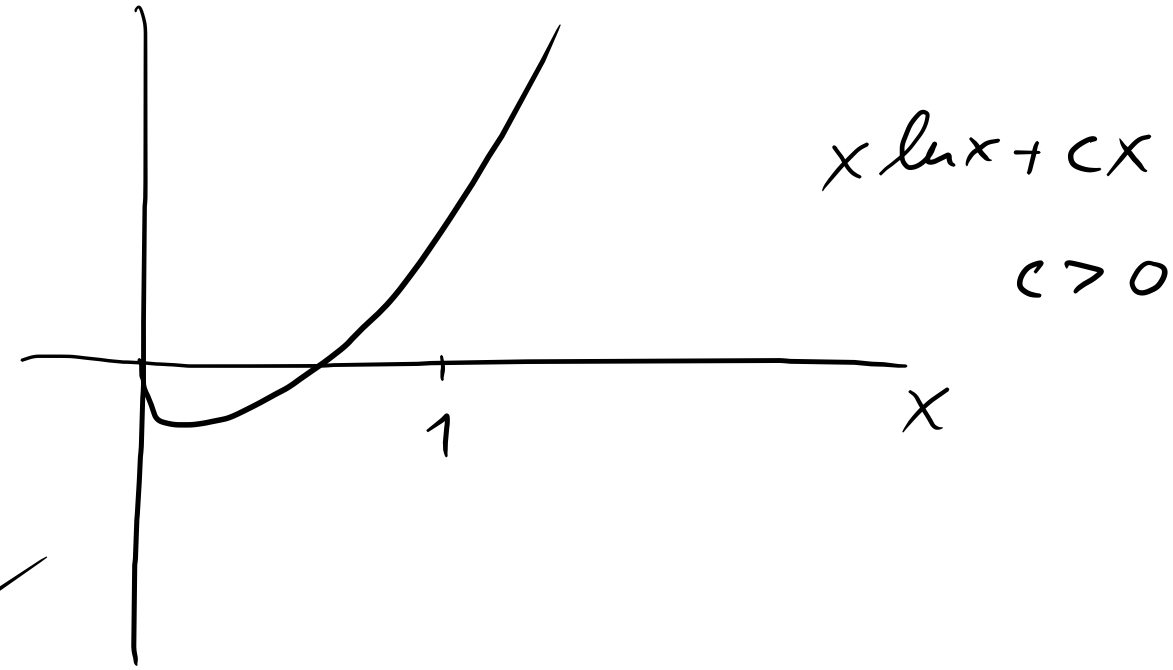
__Bahnen__ $\dot{\underline{y}} = J\underline{y}$, $y_1(y_2) = ?$, $y_1(t) = e^{2t}y_{01} + te^{2t}y_{02}$

$y_2(t) = e^{2t}y_{02}$

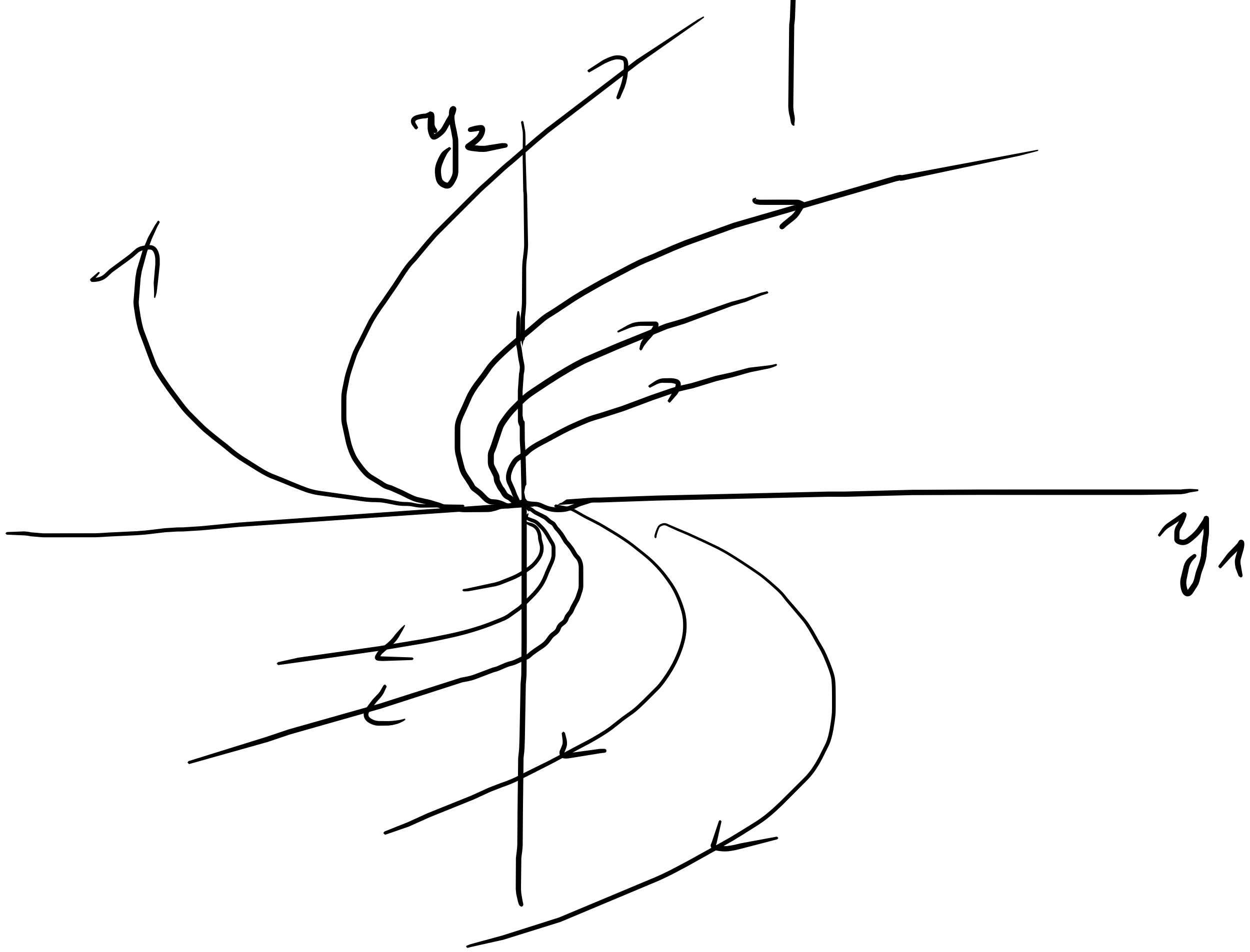
$$e^{2t} = \frac{y_2(t)}{y_{02}} \Rightarrow y_1(t) = \frac{y_2(t)}{y_{02}}y_{01} + \frac{y_2(t)}{\cancel{y_{02}}}\cancel{y_{02}}\,\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y_2(t)}{y_{02}}\right)$$

also $\quad y_1 = \frac{1}{\lambda} |y_2| \ln |y_2| + (\text{const.})\, y_2$





also



für $\lambda > 0$

3. Lösungsweg für $\underline{\dot{y}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{y}$

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad \dot y_1 &= 2y_1 + y_2 \\ (2)\quad \dot y_2 &= \phantom{2y_1 +{}} 2y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \ddot y_1 \overset{\dot{(1)}}{=} 2\dot y_1 + \underbrace{\dot y_2} = 4\dot y_1 - 4y_1$$

$$\overset{(2)}{=} 2y_2 \overset{(1)}{=} 2\dot y_1 - 4y_1$$

also $\ddot y_1 = 4\dot y_1 - 4y_1$

exp-Ansatz $y_1(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 = 4\lambda - 4 \iff (\underline{\lambda} - 2)^2 = 0$

ÜA: Fund.lsgen $y_1(t) = e^{\lambda t}$, $\quad y_1(t) = t e^{\lambda t}$

hier $y_1(t) = e^{2t}$, $\quad y_2(t) = t e^{2t}$

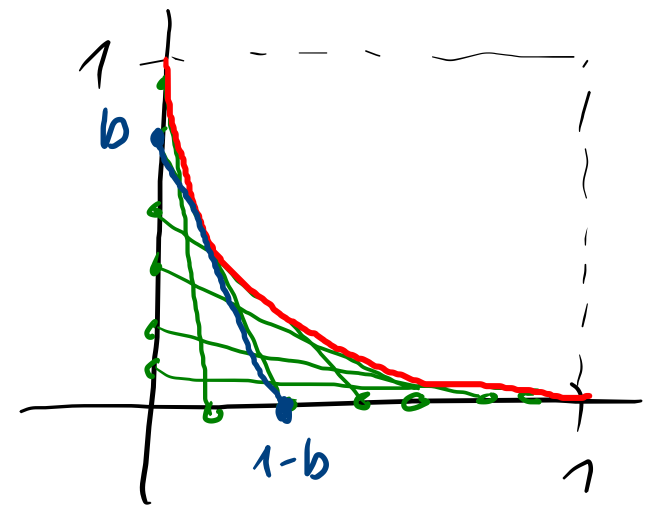
allg. Lsg. $y_1(t) = \underline{a e^{2t} + b t e^{2t}}$.

$$\underline{y_2} \overset{(1)}{=} \dot y_1 - 2y_1 = \cancel{2a e^{2t}} + b e^{2t} + \cancel{2bt e^{2t}} - \cancel{2a e^{2t}} - \cancel{2bt e^{2t}}$$

$$= \underline{b e^{2t}}.$$

$(a = y_{01},\ b = y_{02})$

Einhüllende Kurven



Bsp Problem:
Gegeben Schar von Strecken
von $(0,b)$ nach $(1-b,0)$
$\forall b \in (0,1)$
Gesucht: einhüllende Kurve als Graph von $h(x)$

Strecke_b = Graph von $g_b(x) = mx + b$ mit $m = -\frac{b}{1-b}$

$$h(x) = \sup_{0<b<1} g_b(x)$$

Man parametrisiert meist mit m
in der Form $g_m(x) = mx - f(m)$

Finde $f(m)$: $f(m) = -b$. Löse $m = -\frac{b}{1-b}$ nach b auf:

$$m = -\frac{b}{1-b}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1-b)\,m = -b$$

$$\Longleftrightarrow \quad m = mb - b = (m-1)b$$

$$\Longleftrightarrow \quad -b = -\frac{m}{m-1} = f(m)$$

$$b \in (0,1) \Longleftrightarrow m \in (-\infty, 0) =: I$$

<u>Def</u> Die Fkt $h(x) = \sup\limits_{m \in I} \big(mx - f(m) \big)$

heißt die Legendre-Transformierte von

$f : I \to \mathbb{R}$, $\qquad \underline{\underline{h =: f^*}}$

<u>Prop 1</u> Ist $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$ mit $f''(m) > 0 \quad \forall m \in [a,b]$ ($\Rightarrow$ konvex)

dann nimmt $\forall x \in [f'(a), f'(b)]$ die Fkt

$q_x : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\qquad q_x(m) = mx - f(m)$

ihr sup an, und zwar in genau einem Punkt $\mu(x) \in [a,b]$.

(Forts. Prop 1) $h = f^*$ ist auf $[f'(a), f'(b)]$ definiert und st. diffbar, und h' ist die Umkehrfkt von f'.

<u>Bew</u> q_x st., $[a,b]$ kompakt $\Rightarrow$ nimmt sup an.

q_x diffbar; $q_x' = x - f'(u) = 0 \iff f'(u) = x$

$f'' > 0 \Rightarrow f'$ strikt wachsend von $f'(a)$ nach $f'(b)$

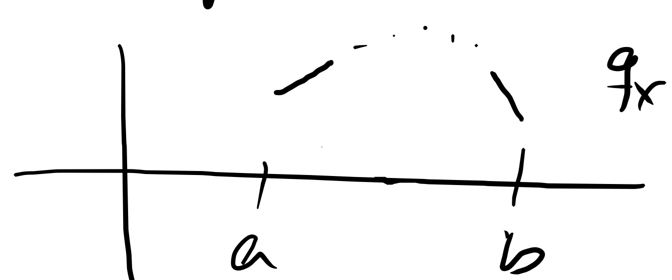
f' st. $\Rightarrow \forall x \in [f'(a), f'(b)] =: I^* \ \exists_1 \ \mu(x) \in [a,b]$:

$f'(\mu(x)) = x$ [also ist μ = Umkehrfkt von f']

Max. von q_x entweder bei a oder bei b oder wo $q_x' = 0$.

bei a: nicht mögl. weil $q_x'(a) \geq 0$

bei b: nicht mögl. weil $q_x'(b) \leq 0$.



Also: Max. bei $\mu(x)$ $\Rightarrow$ $h(x) = q_x(\mu(x))$.

$$h(x) = q_x(\mu(x)) = \mu(x)x - f(\mu(x)).$$

$$h \in C^1(I^*, \mathbb{R})$$

$$h'(x) = \cancel{\mu'(x)x} + \mu(x) - \cancel{\underbrace{f'(\mu(x))}_{x}\mu'(x)}$$

Also ist h' Umkehrfkt von f'. $\square$

Bsp $\quad f(m) = -\dfrac{m}{m-1}$

$$f'(m) = \frac{1}{(m-1)^2}$$

$$f''(m) = -2(m-1)^3 > 0 \quad \forall m < 1$$

$\Rightarrow$ Prop 1 gilt $\forall\, [a,b] \subset (-\infty, 0)$

$\cancel{\Rightarrow}$ $f'(a) \xrightarrow{a \to -\infty} 0$, $\quad f'(b) \xrightarrow{b \to 0} 1$

$\Rightarrow$ h ist auf $(0,1)$ def. und diffbar.

$h' =$ Umkehrfkt von f'

$$f(u) = \frac{1}{(u-1)^2}$$

$$x = \frac{1}{(u-1)^2} \iff -\sqrt{x} = \frac{1}{u-1}$$

$$\iff 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = u = h'(x)$$

$$\Longrightarrow h(x) = x - 2\sqrt{x} + C$$

Bild $\longrightarrow$ $h(x) \xrightarrow{x \to 0} 1$

$\Longrightarrow$ $C = 1$, $\quad \underline{\underline{h(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}}}$

Bild $\longrightarrow$ $h(x) \xrightarrow{x \to 1} 0$