Satz: Seien $V_1, \dots, V_n$ Vektorräume, seien (T,φ) und (S,η) Tensorprodukte zu $V_1 \times V_2 \dots \times V_n$. Dann ist $T \cong S$

Beweis: Nach Definition des Tensorproduktes gilt:

$\forall$ Vektorräume W, $\forall \psi : V_1 \times V_2 \dots V_n \to W$ multilinear

$\exists!\, f_\psi : T \to W$ linear mit $\psi = f_\psi \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\cancel{\psi}\ \eta"'] & T \arrow[r, "f_\eta", "\cancel{f_\psi}"'] & \cancel{W}\ S
\end{tikzcd}$$

Wir wählen $W = S$ und $\psi = \eta$ und erhalten, dass genau eine lineare Abbildung $f_\eta : T \to S$ existiert mit

a) $\eta = f_\eta \circ \varphi$

Analog dazu:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \dots V_n \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, bend right, "\cancel{\psi}\ \varphi"'] & S \arrow[r, "g_\varphi", "\cancel{g_\psi}"'] & \cancel{W}\ T
\end{tikzcd}$$

$\exists!\, g_\varphi : S \to T$ linear mit

b) $\varphi = g_\varphi \circ \eta$

Aus a) und b) folgt (a) in b) einsetzen bzw b) in a)):

I: $\varphi = (g_\varphi \circ f_\eta) \circ \varphi$

II: $\eta = f_\eta \circ g_\varphi \circ \eta$

Wir benutzen wieder die Tensorprodukteigenschaft von (T,φ).
Wählen dabei $W = T$ und $\psi = \varphi$:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \dots V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & T \arrow[r, "f_\varphi"] & T
\end{tikzcd}$$

$\exists!\, f_\varphi : T \to T$ linear, so dass $\varphi = f_\varphi \circ \varphi$

Die Identität auf T hat diese Eigenschaft.

ebenso (nach I) $g_\varphi \circ f_\eta$. Wegen Eindeutigkeit: $id_T = g_\varphi \circ f_\eta$

Ebenso folgt: $id_S = f_\eta \circ g_\varphi$.

Beides zusammen ergibt, dass f_η invers zu g_φ ist.
Also sind g_φ und f_η Isomorphismen $\Rightarrow S \cong T$ $\square$