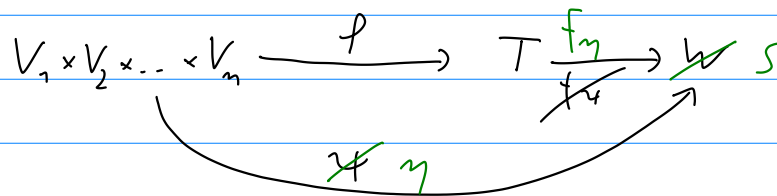


Satz: Seien  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume, seien  $(T, \rho)$  und  $(S, \eta)$  Tensorprodukte in  $V_1 \times V_2 \dots \times V_n$ . Dann ist  $T \cong S$

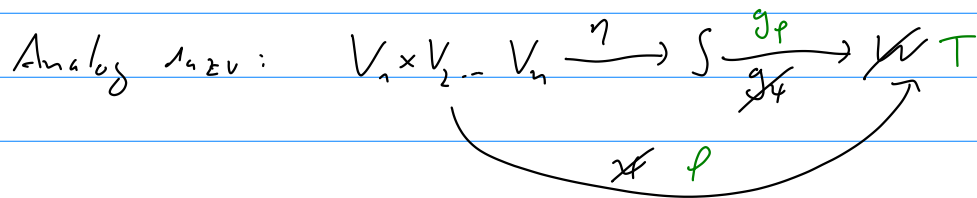
Beweis: Nach Definition des Tensorproduktes gilt:

$\forall$  Vektorräume  $W$ ,  $\forall \varphi: V_1 \times V_2 \dots \times V_n \rightarrow W$  multilinear  
 $\exists!$   $f_\varphi: T \rightarrow W$  linear mit  $\varphi = f_\varphi \circ \rho$



Wir wählen  $W = S$  und  $\varphi = \eta$  und erhalten, dass genau eine lineare Abbildung  $f_\eta: T \rightarrow S$  existiert mit

a)  $\eta = f_\eta \circ \rho$



$\exists!$   $g_\rho: S \rightarrow T$  linear mit

b)  $\rho = g_\rho \circ \eta$

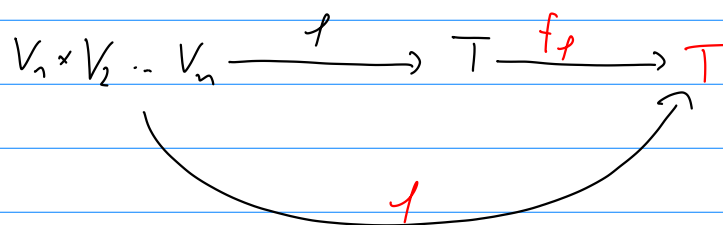
Aus a) und b) folgt (a) in b) einsetzen bzw b) in a):

I:  $\rho = (g_\rho \circ f_\eta) \circ \rho$

II:  $\eta = f_\eta \circ g_\rho \circ \eta$

Wir benutzen wieder die Tensorprodukt-eigenschaft von  $(T, \rho)$ .

Wählen dabei  $W = T$  und  $\varphi = \rho$ :



$\exists!$   $f_\rho: T \rightarrow T$  linear, so dass  $\rho = f_\rho \circ \rho$

Die Identität auf  $T$  hat diese Eigenschaft.

ebenso (nach I)  $g_\rho \circ f_\eta$ . Wegen Eindeutigkeit:  $\text{id}_T = g_\rho \circ f_\eta$

Ebenso folgt:  $\text{id}_S = f_\gamma \circ g_\gamma$ .

Beides zusammen ergibt, dass  $f_\gamma$  invers zu  $g_\gamma$  ist.  
Also sind  $g_\gamma$  und  $f_\gamma$  Isomorphismen  $\Rightarrow S \cong T \quad \square$