<u>Satz:</u> Es existiert in jedem Fall ein Tensorprodukt.

<u>Beweis:</u> Betrachte $n = 2$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & V_1 \otimes V_2 \arrow[r, "f_\psi"] & W \end{tikzcd}$$

Idee: Wähle Basen $B = \{b_1, b_2 ..\} = \{b_j : j \in J\}$ Basis von V_1

$A = \{a_1, a_2 ..\} = \{a_i : i \in I\}$.

Jeden Vektor in V_1 bzw V_2 können wir als Linearkombination von Basisvektoren schreiben.

Jede bilineare Abbildung $\psi : V_1 \times V_2 \to W$ ist eindeutig bestimmt über die Bilder der Basisvektoren.

d.h. kennt man $\psi(b_x, a_y)$ $\forall x \in J, y \in I$ so kennt man ψ und umgekehrt.

Für beliebige Funktionswerte von $\psi(b_x, a_y)$ erhält man immer eine bilineare Abbildung über $\psi(v,w) := \sum \sum \beta_x \alpha_y \, \psi(b_x, a_y)$

falls $v = \sum \beta_x b_x$ und $w = \sum \alpha_y a_y$

Für das Tensorprodukt wählen wir also entsprechend folgende Basis:

Die Abbildungen: $t_{x,y} : I \times J \to K$ mit $t_{x,y}(b_t, a_s) = \delta_{x,t} \, \delta_{y,s}$

Konstruktion des Tensorproduktes:

$$V_1 \otimes V_2 := \{ t : I \times J \to K \mid \text{nur endlich viele Paare } (x,y) \text{ aus } I \times J \text{ haben } t(x,y) \neq 0 \}$$

$V_1 \otimes V_2$ ist offensichtlich ein Vektorraum.

$\alpha t_1 + t_2 \in V_1 \otimes V_2$ falls $t_1, t_2 \in V_1 \otimes V_2$ $\alpha \in K$.

Die Abbildung $\varphi : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ ist definiert über

$t_{xy} := \varphi(b_x, a_y)$ ist definiert als die Abbildung von $I \times J \to K$

mit $t_{x,y}(b_s, a_t) = \delta_{xs} \cdot \delta_{yt}$ d.h. $(b_x, a_y) \to 1$

alle anderen Paare von Basiselem. auf die 0.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"] & V_1 \otimes V_2 = \{ I \times J \to K \mid \dots \} \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

$\{ t_{x,y} : x \in J, y \in I$ ist Basis$\}$

ψ ist eindeutig bestimmt über die Bilder der Basiselemente d.h. $\psi(b_x, a_y)$ $\forall x \in J$ $y \in I$ legt ψ eindeutig fest.

$\boxed{f(t_{xy}) := \psi(b_x, a_y)}$ dies legt die lineare Abbildung f fest.

$f(\varphi(v,w))$ für $v = \sum \beta_x b_x$ und $w = \sum \alpha_y a_y$

z.z.: $f(\varphi(v,w)) = \psi(v,w)$ $\quad$ ψ bilinear

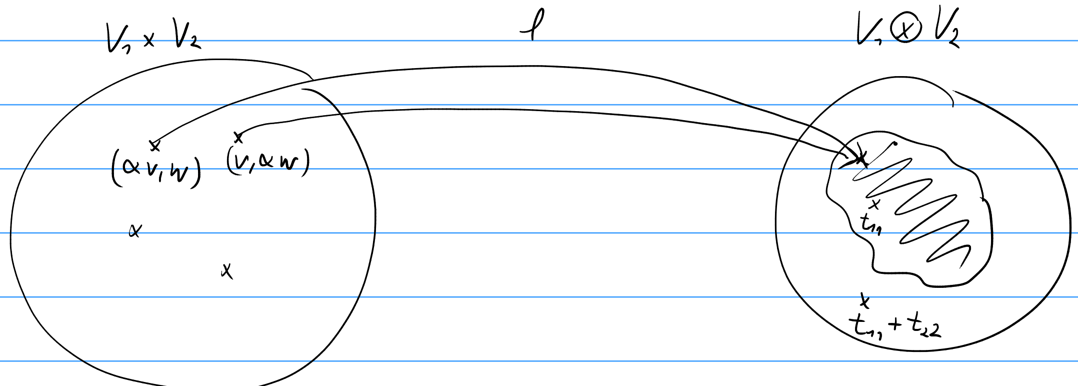
$$f\left(\sum\sum \beta_x \alpha_y t_{xy}\right) = \sum\sum \beta_x \alpha_y f(t_{xy}) \overset{?}{=} \sum\sum \beta_x \alpha_y \psi(b_x, a_y)$$

"=" gilt nur wegen obiger Definition. Bei Abänderung nur eines Funktionswertes $f(t_{xy})$ gilt das "=" nicht mehr allgemein

$\Rightarrow \exists!$ von f per Konstruktion.

Bemerkung: Das Tensorprodukt hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass wir jede multilineare Abbildung $V_1 \times V_2 \dots V_n \to W$ in eindeutiger Weise mit einer linearen Abbildung identifizieren können. Statt multilineare Algebra auf $V_1 \times V_2 \dots V_n$ zu betreiben können wir lineare Algebra auf $V_1 \otimes V_2 \dots \otimes V_n$ betreiben.

Bemerkung: Die Abbildung φ ist in der Regel weder injektiv noch surjektiv.



$\mathrm{Im}(\varphi)$ ist kein Vektorraum. Man muß weitere Elemente dazunehmen, um einen Vektorraum zu erhalten.

Definition: Die Elemente im Bild von φ nennt man auch <u>reine Tensoren</u>.

Beispiel: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ kann als Menge der $n \times m$ - Matrizen aufgefasst werden.

$B = \{e_1, .., e_n\}$ $\quad$ $A = \{e_1 .. e_n\}$

$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ hat wie oben konstruiert eine zweifach indizierte Basis:

$$\{ t_{xy} : x, y \in \{1, ..n\} \}.$$

In natürlicher Weise haben wir die Isomorphie zu den $n \times n$ Matrizen $\quad t_{xy}$ ist Matrix mit Eintrag $a_{xy} = 1$ sonst 0.

z.B. $t_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\langle .,. \rangle"'] & M(n \times n) \arrow[r, "f"] & W \quad K \end{tikzcd}$$

$\langle e_x, e_y \rangle = \delta_{x,y}$

f ist daher die Spur der Matrix.

$(n=2)$ $\quad f(t_{11}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{spur} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ ✓

$f(t_{12}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{spur} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ ✓

usw.

Korollar: Die Dimension von $V_1 \otimes V_2 \otimes .. \otimes V_n$ ist das Produkt der Dimensionen von $V_1, V_2 .., V_n$.

Beispiel: Sei $K[x]$ die Menge der Polynome mit einer Variablen zum Körper K, $K[x_1, x_2]$ " " " mit zwei Variablen.

$$K[x_1, x_2] = K[x_1] \otimes K[x_2]$$

Die Vektorraumeigenschaft von $K[x_1, x_2]$ bzw $K[x]$ ist offensichtlich.

Eine Basis von $K[x]$ ist die Menge $\{1, x, x^2 ...\}$

Eine Basis von $K[x_1, x_2]$ ist $\{1, x_1, x_1^2 ..\} \times \{1, x_2, x_2^2 ...\}$

$\cong \{1, x_1, x_2, x_1 x_2 ... \}$

z.B $f(x_1, x_2) = 3 + \boxed{x_1} + 4 \boxed{x_1 x_2^2}$

Die entsprechenden "reinen Tensoren" sind solche, die als Produkt von Polynomen in x_1 bzw x_2 geschrieben werden können.

$f(x_1, x_2) = g(x_1)\, h(x_2)$ "rein".