Ringhomomorphismen

Definition: Seien R, S Ringe mit Einselement. Eine Abbildung $f: R \to S$ nennt man <u>Ringhomomorphismus</u> $:\Leftrightarrow$

a) $f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall\, a,b \in R$

b) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall\, a,b \in R$

c) $f(1_R) = 1_S$

Bsp: a) $f: R \to R[t]$ geg. durch $f(a) = a \cdot t^0$ ist ein Ringhomomorphismus.

b) $g: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ ist kein Ringhomomorphismus.

c) ist verletzt: $1 \to 2$

Bemerkung: Jeder Ringhomom. ist auch ein Gruppenhomom.

Satz: Gegeben sei ein Ringhomomorphismus $f: R \to S$. Dann ist $\operatorname{Im} f$ Unterring von S, $\ker f$ ist Unterring von R.

$\left(\ker f := \{ x \in R : f(x) = 0 \} \right)$

Beweis: Zunächst ist f ein Gruppenhomomorphismus. Also sind $\operatorname{Im} f$ und $\ker f$ Untergruppen von S bzw. R.

(Unterring von R: Teilmenge von R, selbst Ring mit den selben Verkn.)

z.z. ist noch die Abgeschlossenheit bzgl. $\cdot$, d.h.

$a \cdot b \in \operatorname{Im} f$ falls $a, b \in \operatorname{Im} f$

bzw. $a \cdot b \in \ker f$ falls $a, b \in \ker f$.

Sei also $a, b \in \operatorname{Im} f$ d.h. $\exists\, x, y \in R$ mit $a = f(x)$, $b = f(y)$

$\operatorname{Im} f \ni f(\underbrace{x \cdot y}_{\in R}) = f(x) \cdot f(y) = a \cdot b$ "$\leftarrow$ lesen" ✓

Seien $a, b \in \ker f \Rightarrow f(a) = f(b) = 0$

$\Rightarrow f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) = 0 \Rightarrow a \cdot b \in \ker f$. ✓

Achtung! $\operatorname{Im} f$ enthält das Einselement, $\ker f$ hingegen <u>nicht</u>!

Satz: Die Komposition von Ringhomomorphismen ergibt wieder einen Ringhomomorphismus.

Beweis: Ähnlich wie bei Gruppen

Ideale

Wir betrachten im folgenden kommutative Ringe mit Einselement. (Verallgemeinerung vieler der behandelten Fragen ist möglich).

Erinnerung Gruppen: $\quad$ Gruppe G $\quad$ Gruppe N $(\trianglelefteq G)$

$$G/N$$
Gruppe

Frage: Wie sieht es mit Ringen aus?

Für Ringe funktioniert das nur für den trivialen Fall R/R.

Betrachte dazu R, S Unterring von R und nehme an, dass R/S Unterring ist. z.z. $\Rightarrow S = R$.

Betrachte die Gruppe R/S. „$\bar{a}$ Nebenklasse zu a wie oben".

$$\underset{\overset{\parallel}{S}}{\bar{0}} = \bar{a} \cdot \bar{0} \qquad \boxed{\text{d.h. } \forall a \in R \ \forall x \in S \text{ gilt: } a \cdot x \in S.}$$

Da S Unterring liegt die 1 in S.

$\Rightarrow \forall a \in R$ gilt: $\quad a \cdot 1 = a \in S$

$\Rightarrow S = R$.

Lösung des „Problems" ist es, durch eine andere Klasse von Teilmengen zu dividieren. Diese anderen Teilmengen nennt man „Ideale".

<u>Definition</u>: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.

Eine Teilmenge $I \subset R$ nennt man Ideal $:\Leftrightarrow$

a) I ist Untergruppe von R.

b) $\forall a \in R \ \forall x \in I$ gilt: $\quad a \cdot x \in I$.

Wir werden sehen, dass dies reicht um R/I" einen Unterring zu machen.

Bsp: a) R und $\{0\}$ sind für jeden komm. Ring R Ideale. Beides sind Untergruppen und jeweils ist b erfüllt.

b) Sei $R = \mathbb{Z}$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $n \cdot \mathbb{Z}$ ein Ideal. Wir haben bereits gesehen, dass $n\mathbb{Z}$ eine Untergruppe ist. Auch b) gilt, ein Vielfaches von n multipliziert mit einer ganzen Zahl ergibt wieder ein Vielfaches von n.

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist also ein Ring (s. u.)

Satz: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $I \subset R$ ein Ideal (Schreibweise $I \trianglelefteq R$). Dann ist auf R/I über $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ eine Ringstruktur definiert.

Beweis: Knackpunkt ist es, die Wohldefiniertheit von diesem Produkt zu zeigen.

Betrachte $a, b \in R$ beliebig $x, y \in I$ beliebig

z.z.: $\overline{a \cdot b} = \overline{(a+x) \cdot (b+y)}$

d.h. z.z.: $a \cdot b - [(a+x)(b+y)] \in I$

$$\underbrace{\cancel{a \cdot b} - \cancel{a \cdot b} - \underbrace{\underbrace{a \cdot y}_{\in I} - \underbrace{x \cdot b}_{\in I}}_{\in I} - \underbrace{x \cdot y}_{\in I}}_{\in I} \stackrel{?}{\in} I$$

✓

Die anderen Axiome des Ringes mit Einselement sind relativ einfach zu zeigen, es sind direkte Folgen der Ringstruktur in R.

Existenz der 1: $\overline{1_R}$ Warum ist dies neutral?

$\overline{1_R} \cdot \bar{a} = \overline{1_R \cdot a} = \bar{a}$ ✓

A-Gesetz: $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\overline{a \cdot b}) \cdot \bar{c} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \ldots$

$\ldots \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c})$

Korollar (Homomorphiesatz): Sei f Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen R, S (je mit Eins). Dann ist

$R/\ker f \cong \operatorname{Im} f$ (Ringisomorphismus).