

Ringhomomorphismen

Definition: Seien R, S Ringe mit Einselement. Eine Abbildung

$f: R \rightarrow S$ nennt man Ringhomomorphismus, : \Leftrightarrow

- a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ $\forall a, b \in R$
- b) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ $\forall a, b \in R$
- c) $f(1_R) = 1_S$

Bsp: a) $f: R \rightarrow R[t]$ ges durch $f(a) = a \cdot t^0$ ist ein Ringhomomorphismus.

b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ ist kein Ringhomomorphismus.
c) ist verletzt: $A \rightarrow Q$

Bemerkung: Jeder Ringhomom. ist auch ein Gruppenhomom.

Satz: Gegeben sei ein Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow S$.

Dann ist $\text{Im } f$ Untergruppe von S , $\ker f$ ist Untergruppe von R .

$$(\ker f = \{x \in R : f(x) = 0\})$$

Beweis: Zunächst ist f ein Gruppenhomomorphismus. Also sind

$\text{Im } f$ und $\ker f$ Untergruppen von S bzw. R .

(Untergruppe von R : Teilmenge von R , selbst Ring mit den selben Verkn.).

$\mathbb{Z} \mathbb{Z}$ ist noch die Abgeschlossenheit bzgl. \circ , d.h.

$$a \cdot b \in \text{Im } f \quad \text{falls } a, b \in \text{Im } f$$

$$\text{bzw. } a \cdot b \in \ker f \quad \text{falls } a, b \in \ker f$$

Sei also $a, b \in \text{Im } f$ d.h. $\exists x, y \in R$ mit $a = f(x), b = f(y)$

$$\text{Im } f \ni f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = a \cdot b \quad \text{"lesen"} \quad \checkmark$$

Seien $a, b \in \ker f \Rightarrow f(a) = f(b) = 0$

$$\Rightarrow f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) = 0 \Rightarrow a \cdot b \in \ker f. \quad \checkmark$$

Achtung! $\text{Im } f$ enthält das Einselement, $\ker f$ hingegen nicht!

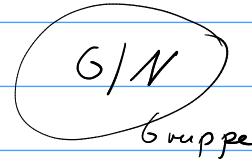
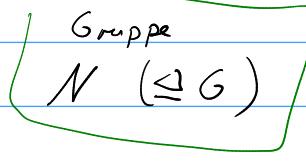
Satz: Die Komposition von Ringhomomorphismen ergibt wieder einen Ringhomomorphismus.

Beweis: Ähnlich wie bei Gruppen

Ideale

Wir betrachten im folgenden kommutative Ringe mit Einselement.
(Vorallgemeiner vielz. der behandelten Fragen ist möglich).

Erinnerung Gruppen:



Frage: Wie sieht es mit Ringen aus?

Für Ringe funktioniert das nur für den trivialen Fall
 R/R .

Betrachte dann R, S Unterring von R und nehme an,
dass R/S Unterring ist. z.B. $\Rightarrow S = R$.

Betrachte die Gruppe R/S . "a Neben Klasse zu a wie oben..."

$$\overline{0} = \bar{a} \cdot \bar{0} \quad \boxed{\text{d.h. } \forall a \in R \quad \forall x \in S \text{ gilt: } a \cdot x \in S.}$$

Da S Unterring liegt die 1 in S .

$$\Rightarrow \forall a \in R \text{ gilt: } a \cdot 1 = a \in S$$

$$\Rightarrow S = R.$$

Lösung des "Problems" ist es, durch eine andere Klasse von Teilmengen zu dividieren. Diese anderen Teilmengen nennt man "Ideale".

Definition: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.

Eine Teilmenge $I \subset R$ nennt man Ideal : (\Leftarrow)

a) I ist Untergruppe von R .

b) $\forall a \in R \quad \forall x \in I \text{ gilt: } a \cdot x \in I$.

Wir werden sehen, dass dies reicht um R/I "einem Unterring zu machen."

Bsp: a) \mathbb{R} und $\{0\}$ sind für jeden komm. Ring R Ideale.

Beides sind Untergruppen und jeweils ist $b \cdot 0 = 0$ erfüllt.

b) Sei $R = \mathbb{Z}$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $n\mathbb{Z}$ ein Ideal.

Wir haben bereits gesehen, dass $n\mathbb{Z}$ eine Untergruppe ist.

Auch b) gilt, ein Vielfaches von n multipliziert mit einer ganzen Zahl ergibt wieder ein Vielfaches von n .

$\Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist also ein Ring (s.u.)

Satz: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $I \subset R$ ein Ideal (Schreibweise $I \trianglelefteq R$). Dann ist auf R/I über $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ ein Ringstruktur definiert.

Beweis: Kernaufgabe ist es, die Wohldefiniertheit von diesem Produkt zu zeigen.

Betrachte $a, b \in R$ beliebig $x, y \in I$ beliebig

$$\text{z.z.: } \overline{a \cdot b} = \overline{(a+x)(b+y)}$$

$$\text{d.h.z.z.: } a \cdot b - [(a+x)(b+y)] \in I$$

$$a \cdot b - a \cdot b - a \cdot y - x \cdot b - x \cdot y \stackrel{I}{\in} I$$

$\underbrace{_{\in I}}_{\in I} \quad \underbrace{_{\in I}}_{\in I} \quad \underbrace{_{\in I}}_{\in I} \quad \checkmark$

Die anderen Axiome des Rings mit Eins erkennt man relativ einfach zu zeigen, es sind direkte Folgen der Ringstrukturen in R .

Existenz der 1: $\overline{1_R}$ Warum ist dies neutral?

$$\overline{1_R} \cdot \overline{a} = \overline{1_R \cdot a} = \overline{a} \quad \checkmark$$

$$\text{A-Gesetz: } (\overline{a \cdot b}) \cdot \overline{c} = \overline{(a \cdot b)} \cdot \overline{c} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \dots$$

$\dots \overline{a} (\overline{b} \cdot \overline{c})$

Korollar (Homomorphiesatz): Sei f Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen R, S (je mit Eins). Dann ist $R/\ker f \cong \operatorname{Im} f$ (Ringisomorphismus).