$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi\text{, multil., altern.}"'] & \Lambda V^r \arrow[r, "f_\psi"] & W \end{tikzcd}$$

$$T^r(V) / V_r$$

$$V_r = \operatorname{span}\left(x_1 \otimes \dots \otimes x_r \; : \; \exists\, i \neq j \text{ mit } x_i = x_j \right)$$

Rechenregeln: a) $x \wedge (y+z) = x \wedge y + x \wedge z$

$(x+y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$

(hier: $x, y, z \in V$ $\qquad x \wedge y := \varphi(x,y)$)

b) $\lambda (x \wedge y) = (\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y)$

c) $0 \wedge x = x \wedge 0 = 0$

d) $x \wedge y = - y \wedge x$

e) $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_i \dots \wedge x_j \dots x_r = - x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_j \dots \wedge x_i \dots x_r$

Beweis: a, b sind Konsequenzen aus der Multilinearität von φ.

c) folgt direkt aus b) mit der Wahl $\lambda = 0$

d) Sei $x, y \in V$. Da φ alternierend:

$$0 = (x+y) \wedge (x+y) = \cancel{x \wedge x} + x \wedge y + y \wedge x + \cancel{y \wedge y} =$$
$$= x \wedge y + y \wedge x$$

e) Analog wie d).

Basen + Dimension des äußeren Produktes

Die Dimension des äußeren Produkts wird sicher kleiner sein als $\dim(T^r(V))$, da wir ja durch V_r geteilt haben.

Satz: Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist $(b_{i_1} \wedge b_{i_2} \dots \wedge b_{i_r} \; : \; 1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_r \leq n)$ eine Basis von $\Lambda^r V$.

Korollar: Die Dimension von $\Lambda^r V$ ist also $\binom{n}{r}$.

Falls $r > n$ dann ist $\Lambda^r V = \{0\}$

Beweis des Satzes: Wir werden zeigen, dass obige Menge in der Tat ein Erzeugendensystem von $\Lambda^r V$ ist, also ist die Anzahl der Vektoren in der Menge $\binom{n}{r} \geq \dim \Lambda^r V$.

Danach zeigen wir, dass $\binom{n}{r} \leq \dim \Lambda^r V$.

$\Rightarrow$ Basiseigenschaft.

a) Erz. sys.: Es ist $(b_{i_1} \otimes b_{i_2} \otimes \dots \otimes b_{i_r} \mid 1 \leq i_j \leq n : j \in \{1, \dots, r\})$ ein Basis $T^r(V)$

$\Rightarrow$ $(b_{i_1} \wedge b_{i_2} \wedge \dots \wedge b_{i_r} \mid 1 \leq i_j \leq n : j \in \{1, \dots, r\})$ ist Erzeugendensystem von V^r

Da $b_{i_1} \wedge b_{i_2} \dots b_{i_r} = 0$ falls ein Paar $i_j = i_l$ für $j \neq l$ können wir alle solchen Vektoren rausnehmen.

Ebenso gilt bei Vertauschung zweier Elemente, dass sich nur das Vorzeichen ändert. Entsprechend ist

$$b_{i_1} \wedge b_{i_2} \wedge \dots \wedge b_{i_k} \dots \wedge b_{i_l} \dots \wedge b_{i_r} = -b_{i_1} \dots b_{i_l} \dots b_{i_k} \dots$$

falls $i_k < i_l$

Die beiden sind also linear abhängig.

Man kann entsprechend Elemente entfernen solange bis die im Satz genannte Menge übrig ist.

Man lässt immer das Element, bei dem der kleinere Index zuerst kommt in der Menge.

Die Menge bleibt jeweils Erzeugendensystem.

b) z.z. $\dim \Lambda^r V \geq \binom{n}{r}$:

Definiere dazu einen Vektorraum der Dimension $\binom{n}{r}$, also $K^{\binom{n}{r}}$

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi\text{, multilin, altern}"'] & \Lambda^r V \arrow[r, "f_\psi", "\text{surj.}"'] & K^{\binom{n}{r}} \end{tikzcd}$$

surj.

Konstruiere ein geeignetes $\psi : V^r \longrightarrow K^{\binom{n}{r}}$.

Dazu definieren wir $\binom{n}{r}$ verschiedene Abbildungen $V^r \to K$ (jeweils multilinear, alternierend)

Sei D eine Basis von $K^{\binom{n}{r}}$ $\quad D = (e_1 \dots e_{\binom{n}{r}})$

Es ist geschickt die Labels der Indexmenge anders zu wählen

$\rightarrow D = (e_{i_1 i_2 \dots i_r} : 1 \le i_1 < i_2 \dots \le n)$

Sei $x = (x_1, \dots, x_r) \in V^r$ $\quad x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} b_i$

($B = (b_1 \dots b_n)$ ist Basis von V) $\quad r \le n$

Für gegebenes $1 \le i_1 < i_2 \dots \le n$ erhält man durch Streichen der Zeilen $i_1, i_2, \dots, i_r$ eine quadratische $(r \times r)$-Matrix

Diese Matrix nennen wir $X_{i_1 i_2 \dots i_r}$.

Für jeden Basisvektor aus D erhalten wir also eine entsprechende $r \times r$ Matrix.

$\psi_{i_1 i_2 \dots i_r} := \det X_{i_1 i_2 \dots i_r}$. (multilinear + alternierend)

$\Rightarrow \psi : (x_1, \dots x_r) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \det X_{i_1 i_2 \dots} \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow e_{i_1 i_2 \dots}$

Nach definierender Eigenschaft des äußeren Produktes erhalten wir eine entsprechende lineare Abbildung $f_\psi : \Lambda^r V \to K^{\binom{n}{r}}$.

Wegen Normiertheit der Determinante gilt:

Wähle $x_j = b_{i_j}$ $\forall j = 1, \dots, r$

Wie wirkt ψ auf $(b_{i_1}, b_{i_2} \dots b_{i_r})$?

$\psi(b_{i_1} \dots b_{i_r}) = e_{i_1 i_2 \dots i_r}$, d.h. ψ erreicht jeden Basisvektor in $K^{\binom{n}{r}}$.

$\Rightarrow \psi$ ist surjektiv

$\Rightarrow f_\psi$ ist surjektiv $\Rightarrow$ Beh.