Äußeres Produkt und lineare Abbildungen

Satz: Es seien U, V, W K-Vektorräume, $f: V \to W$, $g: W \to U$ seien lineare Abbildungen. Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

a) $\exists!$ lineare Abbildung $\Lambda^r f : \Lambda^r V \to \Lambda^r W$ mit der Eigenschaft

$$\Lambda^r f(x_1 \wedge x_2 . \wedge x_r) = f(x_1) \wedge f(x_2) .. \wedge f(x_r)$$

für alle $x_1, .. x_r \in V$

b) $\Lambda^r(g \circ f) = \Lambda^r g \circ \Lambda^r f : \Lambda^r V \longrightarrow \Lambda^r U$

und $\Lambda^r id_V = id_{\Lambda^r V}$

Beweis: a) Sei $\psi : V^r \longrightarrow \Lambda^r W$ gegeben durch

$$\psi(x_1, x_2, .., x_r) := f(x_1) \wedge f(x_2) .. f(x_r).$$

Wegen der Rechenregeln für äußere Produkte ist ψ multilinear und alternierend.

$\Rightarrow$ Es gibt eine eindeutige Abbildung f_ψ so dass:

$$\psi = f_\psi \circ p \Rightarrow \psi(x_1 .., x_r) = f(x_1) \wedge f(x_2) .. \wedge f(x_r)$$
$$= f_\psi(x_1 \wedge x_2 ... \wedge x_r)$$

Dieses f_ψ nennen wir $\Lambda^r f$.

b) $\Lambda^r g \circ \Lambda^r f$ ist linear und geht von $\Lambda^r V$ nach $\Lambda^r U$.

$$\Lambda^r g \circ \Lambda^r f(x_1 \wedge .. \wedge x_r) \overset{a)}{=} \Lambda^r(g(f(x_1) \wedge f(x_2) .. f(x_r))) =$$

$$\overset{a)}{=} g(f(x_1)) \wedge g(f(x_2)) ... \wedge g(f(x_r)) = \Lambda^r(g \circ f)(x_1 \wedge x_2 .. \wedge x_r)$$

Wegen der Eindeutigkeit gilt $\Lambda^r g \circ \Lambda^r f = \Lambda^r(f \circ g)$

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & \Lambda^r(f \circ g) \arrow[r] & \Lambda^r U \end{tikzcd}$$

Siehe Tensorprodukt: Eine lineare Abbildung ist eindeutig falls auf den reinen Produkten gegeben.

Die Eigenschaft für id gilt analog

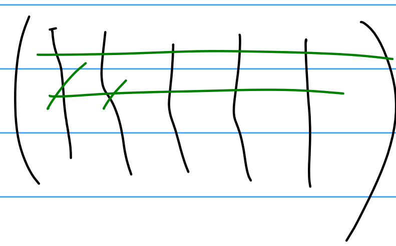
$$\Lambda^r \mathrm{id}_V (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_r) = \mathrm{id}(x_1) \wedge \mathrm{id}(x_2) \dots \mathrm{id}(x_r) = x_1 \wedge \dots \wedge x_r$$

<u>Satz</u>: Es sei $B = (b_1 \dots b_n)$ eine Basis von V,
$D = (d_1 \dots d_m)$ eine Basis von W.
Sei $f: V \to W$ linear, $M_D^B(f) = A$.
Sei $r \le \min(n, m)$, $\tilde{B} = (b_{i_1} \wedge b_{i_2} \dots \wedge b_{i_r} : 1 \le i_1 < i_2 \dots < i_r \le n)$
$\tilde{D} = (d_{i_1} \wedge d_{i_2} \dots \wedge d_{i_r} : 1 \le i_1 \dots < i_r \le m)$

Dann ist $M_{\tilde{D}}^{\tilde{B}}(\Lambda^r f) = \left(A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots j_r)\right)_{\substack{1 \le i_1 < i_2 \dots < i_r \le m \\ 1 \le j_1 \dots \le n}}$

die Matrixdarstellung von $\Lambda^r f$ bzgl $\tilde{B}$ und $\tilde{D}$.

Dabei ist $A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots j_r)$ die Determinante der entsprechenden Teilmatrix, die nur aus den Zeilen $i_1, i_2 \dots i_r$ und den Spalten $j_1, \dots, j_r$ besteht.

$A =$ 

\# Zeilen $= m$
\# Spalten $= n$

<u>Beweis</u>:

Wir wenden $\Lambda^r f$ auf ein bel. Basisvektor aus $\tilde{B}$ an.
Sei also $1 \le j_1 < j_2 \dots < j_r \le n$.

$$\Lambda^r f(b_{j_1} \wedge b_{j_2} \dots \wedge b_{j_r}) = f(b_{j_1}) \wedge f(b_{j_2}) \dots f(b_{j_r}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{i j_1} \cdot d_i \wedge \dots \wedge \sum_{i=1}^{m} a_{i j_r} d_i =$$

$$= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_r = 1 \\ |\{i_1, \dots i_r\}| = r}}^{m} a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} \dots \cdot a_{i_r j_r} \boxed{d_{i_1} \wedge d_{i_2} \dots \wedge d_{i_r}}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 \dots < i_r \le m} \sum_{\sigma \in S_r} \boxed{\mathrm{sgn}(\sigma)} a_{i_{\sigma(1)} j_1} \dots a_{i_{\sigma(r)} j_r} \boxed{d_{i_1} \wedge \dots \wedge d_{i_r}}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 \dots < i_r \le m} A(i_1 i_2 \dots i_r \mid j_1 j_2 \dots j_r) \cdot d_{i_1} \wedge \dots \wedge d_{i_r}$$