$$B = T^t A T$$

---

**Definition:** Sei $b: V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform dann nennt man die Abbildung $q: V \to K$ gegeben durch $q(x) := b(x,x)$ quadratische Form.

Achtung: $q$ ist keine lineare Abbildung!
Falls $b$ ein Skalarprodukt definiert $\sqrt{q}$ einen Längenbegriff (Norm).

**Binomische Formel:** $\boxed{q(x+y)} = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y)$

$$= q(x) + b(x,y) + b(x,y) + q(y) =$$

$$\boxed{= q(x) + (1+1)\, b(x,y) + q(y)}$$

Falls in unseren Körper $1+1=0$ ist haben wir also

$$q(x+y) = q(x) + q(y)$$

Ansonsten: $q(x+y) = q(x) + 2\, b(x,y) + q(y)$ , $2 \neq 0$

**Definition:** Ein Körper hat Charakteristik 2 $:\Leftrightarrow 1+1=0$.
$\operatorname{char}(K) = 2$.

**Korollar:** Sei $b$ eine sym. Bilinearform $b: V \times V \to K$ mit $\boxed{\operatorname{char}(K) \neq 2}$. Dann gilt: $q \equiv 0 \Leftrightarrow b \equiv 0$
$\left( q(x) = 0 \ \forall x \in V \Leftrightarrow b(x,y) = 0 \ \forall x,y \in V \right)$
Falls $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt diese Aussage nicht.

**Beweis:** "$\Leftarrow$" trivial: wähle $x = y$ R.S. $\Rightarrow \underbrace{b(x,x)}_{=: q(x)} = 0 \ \forall x$

"$\Rightarrow$" Sei $\boxed{q(x) = 0 \quad \forall x \in V.}$ WA: $\exists\, x,y \in V$ mit $b(x,y) \neq 0$

Binomische Formel: $q(x+y) = q(x) + 2\, b(x,y) + q(y)$

$$2\, b(x,y) = \underbrace{q(x+y)}_{=0} - \underbrace{q(x)}_{=0} - \underbrace{q(y)}_{=0} = 0$$

"Produkt $= 0$ mind ein Faktor $0$" Da $\boxed{2 \neq 0} \Rightarrow b(x,y) = 0$ ↯

**Satz:** Sei $b: V\times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, $\mathrm{char}(K)\neq 2$ $(1\neq -1,\ 2=0 \dots)$. Dann gibt es eine Basis $B$ von $V$, so dass die darstellende Matrix diagonal ist ($V$ endlich dim).

**Beweis:** Induktion über $n = \dim V$.

Induktionsanfang: $n=1$ $\qquad 1\times 1$-Matrix hat immer Diagonalgestalt ✓

Induktionsschritt: $n \to n+1$, Annahme: Aussage gilt für $n$.

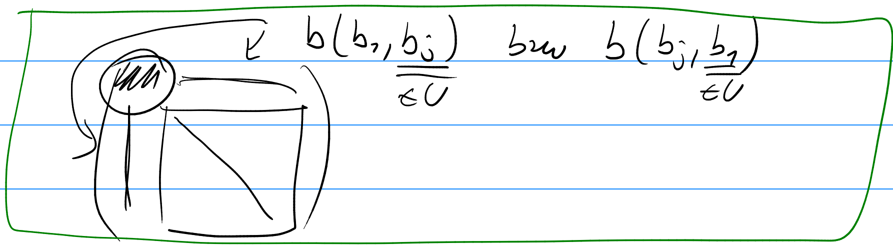
Sei $\dim(V) = n+1$. Falls $b\equiv 0$ sind wir fertig.

d.h. wir brauchen nur Fall $b\not\equiv 0$ betrachten.

Wegen Kor.: $q\not\equiv 0$ d.h. $\exists\, x\in V$ mit $q(x) = \boxed{b(x,x)\neq 0}$.

Diesen Vektor wählen wir als ersten Basisvektor.

Skizze:




Definiere $U := \{ y\in V : b(x,y) = 0\}$.

Wir zeigen nun, dass $V = U \oplus \mathrm{span}(\{x\})$.

Dazu gilt zu zeigen: Jeder Vektor $y\in V$ kann zerlegt werden in $y = u + \alpha x$ $\quad \alpha\in K,\ u\in U$

und die Zerlegung ist eindeutig.

Sei also $y\in V$. Betrachte $u = y - \alpha x$ und zeige, dass $\alpha$ gefunden werden kann, so dass $u\in U$.

$$0 = b(x,u) = b(x, y-\alpha x) = b(x,y) - \alpha \underbrace{\boxed{b(x,x)}}_{\neq 0}$$

Da $b(x,x)\neq 0$ kann man nach auflösen:

$$\alpha = \frac{b(x,y)}{b(x,x)}$$

Eindeutigkeit: Diese folgt aus $U \cap \mathrm{span}(\{x\}) = \{0\}$ ⊛

$(u_1 + \alpha_1 x = u_2 + \alpha_2 x \iff u_1 - u_2 = (\alpha_2 - \alpha_1) x \Rightarrow$ Eind. $)$

Sei $z\in U$ $\quad z = \beta x \qquad b(z,x) = 0$ da $z\in U$

$$b(z,x) = b(\beta x, x) = \beta\, b(x,x) \Rightarrow \beta = 0$$

$\Rightarrow z = \beta x = 0$.

Die Dimension von $U$ ist also $n$.
Wir benutzen die Induktionsannahme für $b|_{U\times U}: U\times U \to K$.
und finden dadurch eine Basis von $U$, $(\{b_1, b_2 \dots b_n\}$
so dass $b|_{U\times U}$ diagonal dargestellt wird.

$$\mathcal{B} = \{\underset{a_1}{x}, \underset{a_2}{b_1}, \dots \underset{a_{n+1}}{b_n}\} \qquad (A)_{ij} = b(a_i, a_j)$$

Falls $i=1$ d.h. $a_1 = x$ und $j \neq 1$ oder
$i \neq 1$ und $j = 1$ $\Rightarrow (A)_{ij} = 0$
( $b$ von $x$ mit Element aus $U \ni \{b_1 \dots b_n\}$ )
Falls $i>1$ $j>1$; $i \neq j$ $(A)_{ij} = b(b_{i-1}, b_{j-1}) = 0$

## Bestimmung von $T$

Wir haben gesehen, dass für jede symmetrische Bilinearform (falls $1 \neq -1$) eine Basis existiert, so dass die darst. Matrix diagonal ist. Aber wie findet man diese?
Wähle dazu zunächst eine beliebige Basis von $V$.
$M_{\mathcal{B}}(b) = A$. Da $b$ symmetrisch, ist $b(b_i, b_j) = b(b_j, b_i)$
daher ist die Matrix $A$ symmetrisch.
Auch die Gegenrichtung gilt: $b(x,y) = \sum \alpha_i \beta_j \, b(b_i, b_j)$ ⊛
falls $x = \sum \alpha_i b_i$ und $y = \sum \beta_j b_j$
Falls $A$ symmetrisch $\Rightarrow$ ⊛ $= \sum \alpha_i \beta_j \, b(b_j, b_i) = b(y, x)$

(Wir haben also eine Isomorphie zwischen den symmetrischen Bilinearformen und den symmetrischen Matrizen)
Statt eine Basis direkt zu suchen können wir also die Matrix $A$ betrachten und ein $T$ konstruieren, so dass $T^t A T$ diagonal ist.

Sei also $A$ eine beliebige symmetrische Matrix, suche $T$ so dass $T^t A T$ diagonal.

<u>Vorgehensweise</u>: Wir transformieren schrittweise $A$ durch Multiplikation mit Elementarmatrizen:

$$A = A_0 \longrightarrow E_1^t A E_1 = \boxed{A_1} \longrightarrow E_2^t A_1 E_2^t = E_2^t E_1^t A E_1 E_2 =$$
$$= (E_1 E_2)^t A (E_1 E_2) \quad \text{usw.}$$

$$\begin{pmatrix} x & x & \\ x & x & \\ & & \end{pmatrix}$$