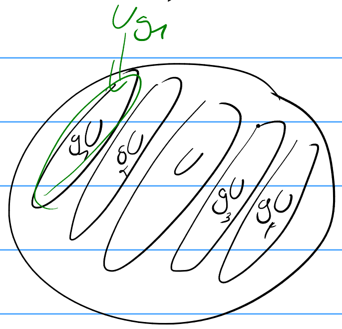
Erinnerung:

$N \leq G$ heißt Normalteiler $:\iff g n g^{-1} \in N \quad \forall g \in G, n \in N$

$(N \trianglelefteq G)$

$\to gN = Ng$

$(gN)(hN) = (gh)N$



G

Bemerkung: Für Normalteiler sind alle Linksnebenklassen gN identisch mit den jeweiligen Rechtsnebenklassen. (eine der def. Eigenschaften $gN = Ng$)

Es reicht sogar: Jede Linksnebenklasse ist eine Rechtsnebenklasse, damit N Normalteiler sein muß.

Satz: Sei $N \trianglelefteq G$, $U \leq G$. Dann gilt:

a) $UN \leq G$

b) $N \trianglelefteq UN$

c) $N \cap U \trianglelefteq U$

Beweis: a) z.z.: $\underbrace{a \in UN \quad b \in UN}$ $\Rightarrow ab^{-1} \in UN$

$\Rightarrow \exists\, u, v \in U \quad n, m \in N: \quad a = un \quad b = vm$

$$ab^{-1} = u n m^{-1} v^{-1} = \underbrace{u v^{-1}}_{\in U} \underbrace{v \underbrace{(n m^{-1})}_{\in N} v^{-1}}_{\Rightarrow \in N} \in UN \quad \square$$

b) z.z.: $\forall n \in N \quad \forall g \in UN$ gilt: $g^{-1} n g \in N$

da $N \trianglelefteq G$ gilt dies sogar $\forall g \in G$!

($N \leq UN$ ist offenbar, da $N \subset UN$ und N Untergruppe von G)

c) z.z. $\forall\, \boxed{n \in N \cap U}$ und alle $\boxed{g \in U}$ gilt:

$g^{-1} n g \in N \cap U$.

($N \cap U \leq U$ offenbar gültig) $N \cap U$ ist Untergruppe von G nach Satz

1. $g^{-1} n g \in N$ da $N \trianglelefteq G$ daher gilt $g^{-1} n g \in N$ sogar für alle $g \in G$

2. $g^{-1} n g \in U$, $g \in U \Rightarrow g^{-1} \in U$; $\boxed{n \in U} \Rightarrow g^{-1} n g \in U \quad \square$

Faktorengruppe

Satz: Sei $N \trianglelefteq G$ dann ist G/N zusammen mit der natürlichen Verknüpfung $\circ$: $(gN)\circ(hN) = (gh)N$ eine Gruppe.
Die Abbildung $\bar{\cdot} : G \to G/N$ definiert durch $\bar{g} = gN$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis: a) Gruppeneigenschaft: $\circ$ ist in der Tat eine Verknüpfung:
- Das Resultat ist per Def von $\circ$ eine Linksnebenklasse.
- $\circ$ ist wohldefiniert, bei Wahl verschiedener Repräsentanten g, h erhält man das selbe Resultat

$$(gN)\cdot(hN) = (gh)N \quad (\text{def. Eigenschaften Normalteiler})$$
$$\tilde{g}N \cdot \tilde{h}N \overset{\shortparallel}{=} (\tilde{g}\tilde{h})N$$

⊛ Das neutrale Element ist N selbst

$$(gN)\circ N = gNN = gN$$

⊛ Das inverse Element zu gN ist $g^{-1}N$

$$\underbrace{gNg^{-1}}_{=N,\text{ da } N \text{ Normalteiler}}N = N$$

⊛ A-Gesetz: $[(gN)\circ(hN)]\circ jN = [(gN)\cdot(hN)](jN) =$
$gN\cdot[(hN)\cdot(jN)] = (gN)\circ[(hN)\circ(jN)]$

Wir benutzen hier: $(gN)\circ(hN) := (gh)N = gN\cdot hN$

Def. Eigenschaften Normalteiler

b) Homomorphismuseigenschaft: $\bar{g}\circ\bar{h} = \overline{gh}$

sei $\bar{g} = gN \qquad \bar{h} = hN$

$$\bar{g}\circ\bar{h} = (g\cdot h)N = (gh)N \qquad \square$$

Beispiel: $G = (\mathbb{Z}, +) \quad N = n\mathbb{Z}$

Die Abbildung, die jeder ganzen Zahl den Rest beim Teilen durch n zuordnet ist ein Gruppenhomomorphismus.

Bemerkung: Falls $U \le G$ aber $U \ntrianglelefteq G$, so erhält man keine natürliche Gruppenstruktur auf G/U:

$$U \ntrianglelefteq G \Rightarrow \exists\, g\in G,\ u\in U : g^{-1}ug \notin U$$

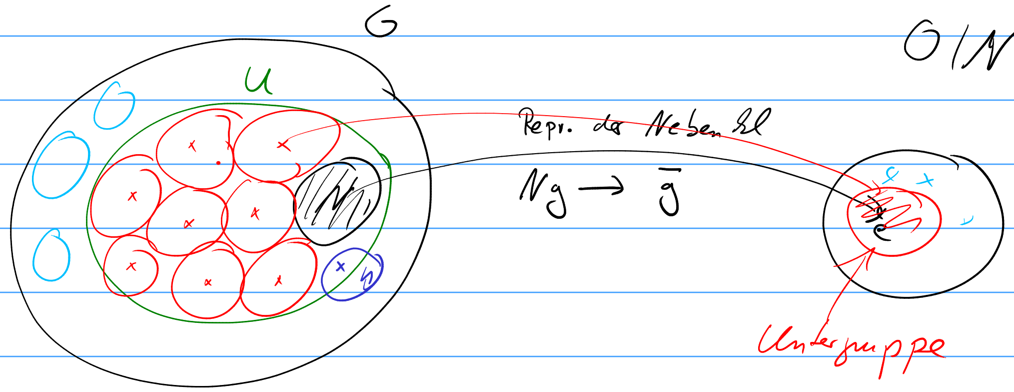
$$\Rightarrow (\underset{\ni\, g}{gU})^{-1} = \underset{\ni\, g^{-1}}{g^{-1}U} \qquad \underbrace{gUg^{-1}U}_{\text{Elemente, die nicht in } U} \ne U \quad ↯$$

Wir betrachten nun Untergruppen von G/N.

Satz: Die Abbildung f von $\{U : U \le G \text{ mit } N \subset U\}$ nach $\{\bar U : \bar U \le G/N\}$ definiert durch

$$f(U) = U/N \text{ ist bijektiv.}$$

(Vorr: $N \trianglelefteq G$)

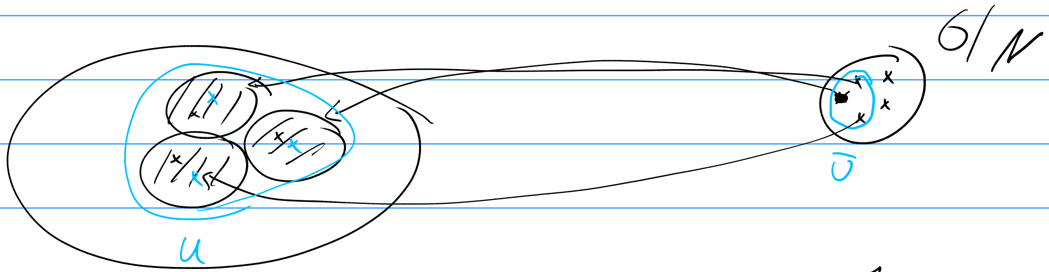


Beweis: Der Ausdruck U/N macht Sinn, da $\underset{=U\cap N}{N \trianglelefteq U}$
U/N ist wie oben gesehen, eine Untergruppe von G/N. ($U/N \subset G/N$ folgt aus $U \subset G$, Gruppeneigenschaft nach Satz)

$\Rightarrow f$ ist in der Tat Abbildung von $\{U : N \subset U \le G\} \to \{\bar U : \bar U \le G/N\}$

f ist surjektiv, da zu jedem $\bar U \le G/N$ ist gilt:

$$U := \bigcup_{\bar g \in \bar U} \bar g \quad \text{ergibt} \quad U/N = \bar U$$



U ist Untergruppe: Sei $a, b \in U$ z.z.: $ab^{-1} \in U$

$a = \tilde a \cdot n \quad n \in N \qquad b = \tilde b m \quad m \in N$

$\tilde{a}$, $\tilde{b}$ sind die entsprechenden Repräsentanten der Nebenklassen $\bar{a}, \bar{b}$

$\tilde{b}^{-1}$ repräsentiert die entsprechende inverse Nebenklasse $\bar{b}$

$\Rightarrow$ $b^{-1} \in U$. Ähnlich folgt $ab^{-1} \in U$

$\bar{a}\,\bar{b}^{-1} \in \bar{U}$

$a \in \bar{a}$ $\quad b^{-1} \in \bar{b}$ $\Rightarrow$ $ab^{-1} \in \bar{a}\,\bar{b}^{-1}$ (Gruppenhomom.)

$\bar{a}\,\bar{b}^{-1} = \overline{ab^{-1}}$