Definition: Sei $G \subset R$, R Ring. Dann ist der von G erzeugte Ring definiert als $\langle G \rangle := \bigcap_{\substack{I \trianglelefteq R \\ G \subset I}} I$, "$I \trianglelefteq R$ heißt I ist Ideal in R"

(Weder bei R noch bei I ist Ex. eine 1 gefordert)

Bemerkung: $\langle G \rangle$ ist immer ideal. $\langle \{a\} \rangle = \langle a \rangle = \{ax : x \in R\}$
(Letzteres gilt in kommutativen Ringen)

Satz: a) $a \mid b \Rightarrow \langle a \rangle \supseteq \langle b \rangle$ Falls R nullteilerfrei.

b) Falls R nullteilerfrei so sind äquivalent

i) $a \mid b$ und $b \mid a$

ii) $\langle a \rangle = \langle b \rangle$

iii) $\exists\, x \in R^*$ mit $\boxed{a = xb}$

Beweis: a) $a \mid b$ sei erfüllt. Sei $x \in \langle b \rangle \Rightarrow \exists\, y \in R^*$ mit $x = by$

$\Downarrow$ $\exists\, z \in R$ mit $az = b$ $\qquad \Downarrow$ $b = xy^{-1}$

$az = xy^{-1} \Rightarrow x = azy \Rightarrow x \in \langle a \rangle$

b) i) $\Rightarrow$ ii) folgt direkt aus a)

ii) $\Rightarrow$ iii) Sei $\langle a \rangle = \langle b \rangle \Rightarrow a \in \langle b \rangle$ d.h.

$\exists\, x \in R$ mit $\boxed{a = xb}$ $\qquad$ z.z. $x \in R^*$

$\exists\, y \in R$ mit $b = y \cdot a$ (analog)

$\Rightarrow b = yx \cdot b \Rightarrow yx = 1 \Rightarrow x \in R^*$

iii) $\Rightarrow$ i) Da $x \in R^*$ existiert mit $xx^{-1}a = xb \Rightarrow b \mid a$

Außerdem ist $x^{-1}a = b \Rightarrow a \mid$

Fehlender Beweis: $ggT(a,b) = \{gx : x \in R^*\}$ mit $g \in ggT(a,b)$

(gilt im nullteilerfreien kommutativen Ring)

Sei $g \in ggT(a,b)$ $\quad x \in R^*$ beliebig

z.z.: $gx \in ggT(a,b)$

Dies folgt aus folgender Einsicht: $c \mid d \Leftrightarrow cx \mid d$

$\Leftrightarrow c \mid dx$

falls $x \in R^*$

$cx \mid d \Rightarrow c \mid d$ ist trivial

$\exists y$ mit $c(xy) = d$

$c \mid d \Rightarrow \exists\, y \in R$ mit $c \cdot y = d \Rightarrow cx(x^{-1}y) = d$

$\Rightarrow g \mid a$ und $g \mid b \Leftrightarrow gx \mid a$ und $gx \mid b$

sowie $y \mid g \Leftrightarrow y \mid gx$ $\qquad \Rightarrow gx \in ggT$

Seien nun $g, h \in ggT(a,b)$ z.z. $\boxed{h = x \cdot g}$ für geeignetes $x \in R^*$

Da $g \in ggT(a,b)$ gilt $x \mid g$ für alle x mit $x \mid a$ und $x \mid b$.

Insbesondere gilt $h \mid g \Rightarrow \exists\, \tilde{x} \in R$ mit $\boxed{h \cdot \tilde{x} = g}$

Ebenso gilt: $\boxed{h = g \cdot x}$ für geeignetes $x \in R$

$h = h \cdot \tilde{x} \cdot x \Rightarrow 1 = \tilde{x} x \Rightarrow x \in R^*$.