"$a \Rightarrow e$": $\to a \sim b :\Leftrightarrow ab^{-1} \in U$ ist Äquivalenzrelation

z.z.: $\boxed{\forall a \in U}$ $\boxed{\forall b \in G \setminus U}$ gilt $ab \notin U$

WA: $\boxed{ab \in U}$

$a \sim e :\Leftrightarrow ae \in U \Leftrightarrow a \in U$

$a \sim b^{-1} :\Leftrightarrow a(b^{-1})^{-1} \in U \Leftrightarrow \boxed{ab \in U}$

$\Downarrow$ ← Äquivalenzrelation

$e \sim b^{-1} :\Leftrightarrow e(b^{-1})^{-1} \in U \Leftrightarrow \boxed{b \in U}$ $\lightning$ zu $b \in G \setminus U$.

$\square$

"$e \Rightarrow a$" $a \in U$ und $b \in G \setminus U \Rightarrow ab \notin U$ $(*)$

z.z. $(U, \circ|_{U \times U})$ ist eine Gruppe.

$(*) \Leftrightarrow a \in U$ und $ab \in U \Rightarrow \boxed{b} \in U$

Zunächst zeigen wir, dass unter dieser Voraussetzung $e \in U$ (e ist das Neutrale aus G)

Da $U \neq \emptyset$ gibt es ein $a \in U$ $a\boxed{e} \in U$ (wähle $b = e$) $\Rightarrow e \in U$.

<u>Ex des Inversen</u>: Sei $a \in U$. $\underbrace{a\boxed{a^{-1}}}_{e} \in U$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} a^{-1} \in U$

Es bleibt zu zeigen, dass $\circ|_{U \times U}$ eine innere Verknüpfung.

Dazu muss man zeigen: $\forall a, b \in U$ ist $ab \in U$.

Sei also $a, \boxed{b \in U.}$ Wie gezeigt ist $a^{-1} \in U$

$\Rightarrow b = \boxed{a^{-1}(ab)} \in U \Rightarrow ab \in U$

$x \in U$ $xy \in U$ $\Rightarrow y \in U$

$\downarrow$ a^{-1} $a^{-1}ab$ $\downarrow$ ab

Bemerkung: Das neutrale Element der Untergruppe ist neutrales von G.
Das Inverse Element aus U ist unabhängig ob man es als inverses in U oder G versteht.

Schreibweise: "$U \leq G$" falls $U \subset G$ Untergruppe.
("$U < G$" falls $U \subsetneq G$ Untergruppe)

Bemerkung: Für jede Gruppe $(G, \circ)$ ist G selbst sowie $\{e\}$ einer Untergruppe.

Satz: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, I eine Indexmenge. $\forall i \in I$ sei $U_i \leq G$. Dann ist
$$U := \bigcap_{i \in I} U_i$$ ebenfalls Untergruppe von G.

Beweis: Seien $U_i \leq G \quad \forall i \in I$

z.z $U \leq G$. d.h $\forall a, b \in U$ ist $ab^{-1} \in U$

Sei $a, b \in U \Rightarrow a, b \in U_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow ab^{-1} \in U_i \quad \forall i \in I$, da $U_i \leq G$

$\Rightarrow ab^{-1} \in U$ $\square$

Bemerkung: Die Vereinigung von Untergruppen liefert i.A. keine Untergruppe

z.B.: $2\mathbb{Z} := \{\ldots -4, -2, 0, 2, 4 \ldots\}$

$3\mathbb{Z} := \{\ldots -6, -3, 0, 3, 6 \ldots\}$

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ist keine Untergruppe.

$2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \qquad 2 + (-3) = -1 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

Definition: Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe, $T\subset G$.
Dann ist die <u>von T erzeugte Untergruppe</u> definiert durch:

$$\langle T\rangle := \bigcap_{T\subset U\leq G} U$$

d.h. man schneidet über alle Untergruppen von G, die T enthalten.

Bemerkung: a) Wegen des Satzes oben ist $\langle T\rangle$ in der Tat eine Untergruppe.

b) $\langle T\rangle$ ist die kleinste Untergruppe von G, die T enthält!
d.h. jede Untergruppe, die T enthält, hat $\langle T\rangle$ als Teilmenge.
$\langle T\rangle \subset U$ falls $T\subset U\leq G$

Satz: Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe, $T\subset G$. Dann gilt:

$$\langle T\rangle = \underbrace{\{q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdots q_n^{\alpha_n} : n\in\mathbb{N}_0,\ q_1\dots q_n\in T,\ \alpha_1\dots\alpha_n\in\mathbb{Z}\}}_{=\text{R.S.}}$$

Beweis: 1. Schritt: Wir zeigen R.S. $\leq G$ mittels Def c)

Sei $a,b\in$ R.S.

$a = q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\dots q_n^{\alpha_n}$ $\qquad b = r_1^{\beta_1}r_2^{\beta_2}\dots r_m^{\beta_m}$

$a^{-1} = q_n^{-\alpha_n}\dots q_2^{-\alpha_2}q_1^{-\alpha_1}\in$ R.S.

$ab = q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\dots q_n^{\alpha_n}r_1^{\beta_1}r_2^{\beta_2}\dots r_m^{\beta_m}\in$ R.S.

$\Rightarrow$ R.S. ist Untergruppe

2. Schritt: $T\subset$ R.S. $\quad$ wähle $n=1=\alpha_1$

$$\Rightarrow \underbrace{\{q_1 : q_1\in T\}}_{=T}\subset \text{R.S}$$

R.S. $\supset \langle T\rangle$ $\qquad$ R.S. $\geq \langle T\rangle$

3. Schritt: $R.S \leq \langle T \rangle$

Sei $T \subset U \leq G$.

d.h. alle Elemente aus T sind in U.

alle ganzzahligen Potenzen von Elementen aus T sind in U enthalten.

Ebenso alle Produkte, d.h. jedes Element der Form $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}$ mit $a_1 \dots a_n \in T$,
$\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{Z}$

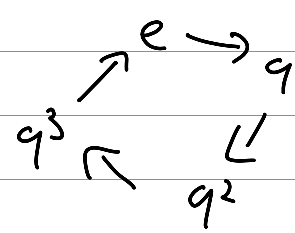
ist in U enthalten, $\Rightarrow U \supset R.S.$

wähle $U = \langle T \rangle \Rightarrow R.S. \leq \langle T \rangle$

$\square$

Definition: Eine Gruppe, die von nur einem Element erzeugt wird, nennt man *zyklisch*

$$Z = \{a^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}\}$$



Satz: Alle Untergruppen von $(\mathbb{Z},+)$ haben die Form $n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

$$n\mathbb{Z} = \{n \cdot \alpha : \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

Beweis: Sei $U \leq \mathbb{Z}$. n sei die kleinste positive Zahl, die in U enthalten ist.

(Sonderfall $U = \{0\}$).

U enthält also negative und positive Elemente, dadurch ist n nach Archimedes wohldefiniert.

Wir zeigen $U = n\mathbb{Z}$

WA: $\exists x \in U$ mit $\boxed{x \neq n\alpha}$ $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$

o.B.d.A sei $x > 0$.

Teile x durch n und betrachte den Rest:

$$x = \alpha \cdot n + r \qquad 0 \leq r < n$$

$$\Rightarrow r \neq 0 \qquad 0 < r < n$$

$$x \in U \qquad \alpha n \in U \qquad (U \supseteq \langle \{n\} \rangle)$$

$$\Rightarrow x - \alpha n = r \in U.$$

r ist also eine natürliche Zahl kleiner als n, die in U liegt

$\lightning$ n def als <u>kleinste</u> nat. Zahl in U.

$\square$