Bidualraum

Ausgehend von einem Vektorraum V haben wir $V^*: V \to K$ diskutiert. V^* ist selbst Vektorraum, wir können den Dualraum zu V^* bilden: V^{**}.

Im Gegensatz zu V, V^* gibt es eine ganz natürliche, basisunabhängige Art V mit V^{**} im endlichdimensionalen Fall miteinander zu identifizieren:

Satz: Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, dann ist die Abbildung $\iota: V \to V^{**}$ $\left(\iota(v) \in V^{**} \quad V^* \to K\right)$ definiert durch

$$\underbrace{\boxed{\iota(v)}}_{\substack{V^* \to K \\ \in V^{**}}}\underbrace{(g)}_{\in V^*} = \underbrace{g(v)}_{\in K} \quad (= \langle g, v\rangle) \quad \forall v \in V, g \in V^*$$

eine Bijektion (Isomorphismus)

Beweis: $\iota(v)$ ist in der Tat eine Abbildung von $V^* \to K$ für jedes $v \in V$.
$\langle g, v\rangle$ ist bilinear, d.h. $\forall v \in V$ ist $\iota(v)$ eine lineare Abbildung dadurch ist $\iota(v) \in V^{**}$.
Die Bilinearität liefert außerdem Linearität "in v" $\Rightarrow \iota: V \to V^{**}$ ist also ein Homomorphismus.
Die Dimension von V, V^*, V^{**} ist identisch nach Satz.
Es reicht also, entweder Surjektivität oder Injektivität von ι zu zeigen.

Injektivität: Sei $\iota(v) = \iota(w)$ $\quad v, w \in V$

$$\iota(v)(g) = \iota(w)(g) \quad \forall g \in V^*$$
$$\langle g, v\rangle = \langle g, w\rangle \quad \forall g \in V^*$$
$$\langle g, v-w\rangle = 0 \quad \forall g \in V^*$$

WA $v - w \neq 0$ wähle $g = (v-w)^t \Rightarrow \langle g, v-w\rangle > 0$ ↯

$\Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow \iota$ ist injektiv.

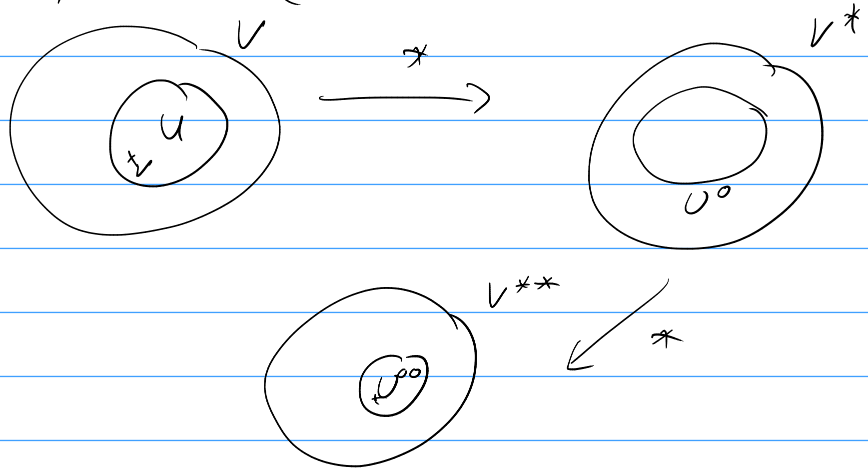
Weitere Eigenschaften: $f: V \to W \qquad f^t: W^* \to V^*$

$$f^{tt}: \begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{f^{tt}} & W^{**} \\ \iota \uparrow & & \uparrow \iota \\ V & \xrightarrow[f]{} & W \end{array}$$

<u>Bemerkung</u>: Falls V unendliche Dimension hat, ist ι im allgemeinen keine Bijektion.

$\iota(v)(g) := \langle g, v\rangle$ definiert weiterhin $V^* \to K$ linear, also ein Element in V^{**}. Es kann aber weitere Elemente in V^{**} geben (Siehe Übung Blatt 45).

Es gelten weitere Äquivalenzen: $(U^\circ)^\circ = \iota(U)$ $\quad U$ Untervektorraum



Dualraum und euklidische VR ($\dim < \infty$)

Für einen euklidischen VR endliche Dimension ($\dim V = n$) hat man die natürliche Identifikation mit $\mathbb{R}^n$ (Wähle ONB B zum Skalarprodukt).

Das Dualisieren macht aus Spaltenvektoren Zeilenvektoren.

($\phi: V \to V^*$ Spalte $\to$ Zeile ist Bijektion)

Die duale Paarung $\langle g, v\rangle$ $g \in V^*$ $v \in V$ entspricht dann dem Skalarprodukt $\langle \phi^{-1}(g), v\rangle$

Für einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ ist $\phi(U^\perp) = U^\circ$

Auf beiden Seiten stehen genau die Elemente, die zum Skalarprodukt bzw der Paarung 0 ergeben.

$$U^\circ := \{ g \in V^* : \overset{\langle g,v\rangle}{g(v)} = 0 \quad \forall\, v \in U \}$$

$$U^\perp := \{ x \in V : \langle x, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in U \}$$

Tensorprodukt

Wir interessieren uns in diesem Kapitel für multilineare Abbildungen von $V_1 \times V_2 \dots \times V_n \to V$ für K-Vektorräume $V_1, \dots, V_n, V$.
Wenn man z.B. das Bild des Paares $(\alpha v, w)$ kennt $(n=2)$ dann kennen wir automatisch das Bild von $(v, \alpha w)$.
Beides ist: $f(\alpha v, w) = \alpha f(v,w) = f(v, \alpha w)$.
Man kann also $(\alpha v, w)$ mit $(v, \alpha w)$ identifizieren beim Thema multilineare Algebra, da jede $f: V \times W \to Z$ dort die selben Funktionswerte hat.

egal

Definition: Seien $V_1, V_2, \dots, V_n$ K-Vektorräume. Ein K-Vektorraum T zusammen mit einer multilinearen Abbildung

$$\varphi: V_1 \times V_2 \dots \times V_n \to T$$ heißt Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_n$

$:\Longleftrightarrow$ Für alle Vektorräume V und alle multilineare Abbildungen $\psi: V_1 \times V_2 \dots \times V_n \to V$ $\exists!$ $f: T \to V$ multilinear, so dass

$$f \circ \varphi = \psi$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \dots \times V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{\psi}"'] & T \arrow[r, "\boxed{f}"] & V \end{tikzcd}$$

Schreibweise: Man schreibt für T auch $T = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$

Beispiel: $V_1 = \mathbb{R}^n$ $V_2 = \mathbb{R}^m$. $V_1 \otimes V_2$ kann man mit der Menge $n \times m$ - Matrizen identifizieren.
(Sei $\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilinear, dann können wir diese mit Matrizen beschreiben.)

$A = x^t \cdot y$ ist die zum Paar (x,y) entsprechende Matrix.

d.h. $\varphi(x,y) = x^t y$

Offensichtlich ist, wie oben motiviert $\varphi(\alpha x, v) = \varphi(x, \alpha v)$

Bemerkung: T ist durch obige Definition nicht eindeutig bestimmt.

Sei z.B. S ein zu T isomorpher Vektorraum,

d.h. $\exists\ g : T \to S$ isomorph.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \dots \times V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\tilde{\varphi}"] \arrow[rrrr, bend right, "\psi"'] & T \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "id_T"'] & S \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[rr, bend left, "\tilde{f}"] & T \arrow[r, "f"] & V
\end{tikzcd}$$

Wenn (φ, T) die Definition des Tensorproduktes erfüllt, so erfüllt auch $(\underbrace{g \circ \varphi}_{\tilde{\varphi}}, S)$ die Definition des Tensorproduktes.

Falls zu jeden V, ψ ein eindeutiges f existiert mit $\psi = f \circ \varphi$, so ist $\tilde{f} := f \circ g^{-1}$ ebenfalls eindeutig mit $\psi = \tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$.

Satz: Seien $V_1, \dots, V_n$ K-Vektorräume, dann ist durch obige Definition das Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2 \dots \otimes V_n$ eindeutig bis auf Isomorphie festgelegt, d.h. falls T und S mit entsprechenden Abbildungen die Definition erfüllen, so sind T und S isomorph.