b) z.z. $(id_V)^t = id_{V^*}$ $\qquad (id_V)^t : V^* \to V^*$

$(id_V)^t(g) = g \circ id_V = g = id_{V^*}\, g$

c) z.z f Isom. $\Rightarrow$ f^t Isomorphismus

dass f^t Homomorphismus ist haben wir bereits gezeigt.

z.z. f bij. $\Rightarrow$ f^t bij.

$$\boxed{id_{V^*}} \underset{b)}{=} (id_V)^t = (f \circ f^{-1})^t \underset{a)}{=} \boxed{(f^{-1})^t \circ f^t}$$

invers zueinander

<u>Definition:</u> Sei V ein K-Vektorraum, U sei Untervektorraum von V.

Die Menge $U^\circ := \{ g \in V^* : \underbrace{\langle g, x \rangle}_{g(x)} = 0 \;\; \forall x \in U \}$

nennt man <u>Anulator</u> von U.

<u>Satz:</u> $U^\circ < V^*$ ist ein Untervektorraum.

<u>Beweis:</u> Folgt direkt aus der Bilinearität von $\langle \, , \, \rangle$:

$\langle \alpha g + h, x \rangle = 0 \quad \forall x \in U$ falls $g, h \in U^\circ$

$= \alpha \langle g, x \rangle + \langle h, x \rangle \quad \Rightarrow \alpha g + h \in U^\circ$

<u>Satz:</u> $\dim U + \dim U^\circ = \dim V$ (falls V endlich dim)

<u>Beweis:</u> Wähle Basis von V: $B = \{b_1, \dots b_n\}$ so, dass $b_1, .. b_k$ Basis von U. (genauer: Wähle Basis von U, ergänze zu Basis von V)

$\Rightarrow B^* = \{b_1^* \dots b_n^*\} \qquad b_j^*(b_i) = \delta_{ij}$.

$U^\circ = \text{span}\{ b_{k+1}^*, \dots b_n^* \}$

z.B $b_{k+1}^*(b_j) = 0$ falls $j \in \{1, \dots k\}$

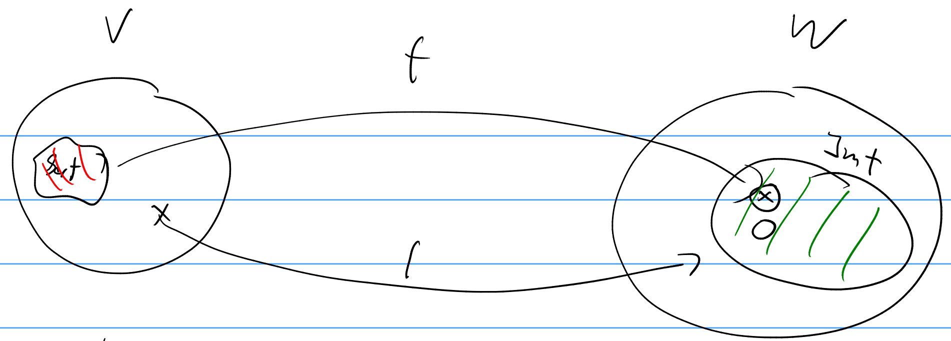
$\Rightarrow b_{k+1}^* \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j}_{\in U} \Big) = 0 \qquad \Rightarrow b_{k+1}^* \in U^\circ$

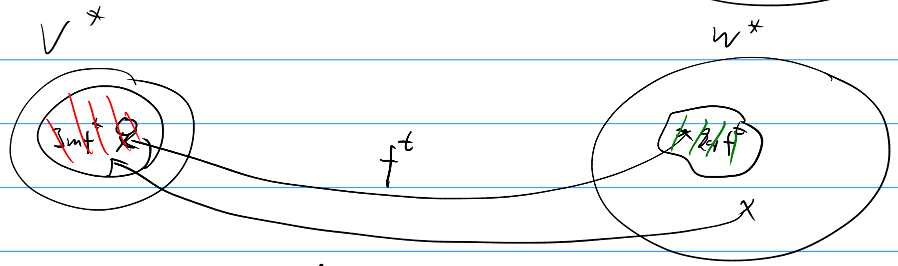
$\Rightarrow b_i^* \in U^\circ \quad \forall i > k$ analog.

Sei $v \notin \text{span}\{ b_{k+1}^*, \dots, b_n^* \} \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i^*$ wobei ein $i_0 \leq k$ existiert, mit $\alpha_{i_0} \neq 0$

$\Rightarrow v(\underbrace{b_{i_0}}_{\in U}) = \alpha_{i_0} \neq 0 \qquad \Rightarrow v \notin U^\circ$

Satz folgt durch einfaches Abzählen der Basisel. von B bzw B^*.





Satz: Seien V, W endlichdim. K-VR, $f: V \to W$ linear.

Dann gilt a) $(\ker f)^0 = \operatorname{Im} f^t$

b) $(\operatorname{Im} f)^0 = \ker f^t$

Beweis: Alle vier Mengen sind Untervektorräume, mit den Dimensionsformeln passt es auch.

b) $f: V \to W \qquad f^t: W^* \to V^*$

$\ker f^t \subset W^* \qquad \operatorname{Im} f \subset W \qquad (\operatorname{Im} f)^* \subset W^*$

Sei $g \in \ker f^t \iff \underbrace{f^t(g)}_{\text{Abbildung!}} = 0$ d.h. $g \circ f(x) = 0 \quad \forall x \in V$

$\iff \langle g, \underbrace{f(x)}_{\operatorname{Im} f} \rangle = 0 \quad \forall x \in V \quad \iff g \in (\operatorname{Im} f)^0$

a) $\ker f \subset V, \quad (\ker f)^0 \subset V^* \qquad \operatorname{Im} f^t \subset V^*$

z.z. $(\ker f)^0 = \operatorname{Im} f^t$

"$\supset$": Sei also $g \in \operatorname{Im} f^t \subset V^* \Rightarrow \exists\, h \in W^*$ mit

$f^t(h) = g \Rightarrow h \circ f = g$ d.h. $h \circ f(x) = g(x) \quad \forall x \in V$

z.z $g \in (\ker f)^0$ d.h. $\langle g, x \rangle = 0 \quad \forall\, x$ mit $f(x) = 0$

$\langle g, x \rangle = g(x) = h(f(x))$

Letzteres ist 0 falls $f(x) = 0$ $\square$

"$\subset$"