Sonderfall: A ist 2×2 Matrix. $(E^t A E)$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \lambda a + b \\ c & \lambda c + d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & \lambda a + b \\ \lambda a + c & \lambda^2 a + \lambda b + \lambda c + d \end{pmatrix}$$ $b = c$, da A symmetr.

$$= \begin{pmatrix} a & \lambda a + b \\ \lambda a + b & \lambda^2 a + 2\lambda b + d \end{pmatrix} = B$$

Falls $a \neq 0$ kann man $\lambda = \frac{-b}{a}$ wählen und die Matrix B ist diagonal

b) Eine ähnliche Rechnung bzw. Vertauschen Index $1 \leftrightarrow 2$ ergibt $$\begin{pmatrix} \lambda^2 d + 2\lambda b + a & \lambda d + b \\ \lambda d + b & d \end{pmatrix}$$

Falls $d \neq 0$ kann man $\lambda = \frac{-b}{d}$ wählen und die Matrix ist diagonal.

c) Falls $a = d = 0$ d.h. $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Es bleibt nur, die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zu "diagonalisieren".

T sei $\begin{pmatrix} x & y \\ s & t \end{pmatrix}$ $\quad T^t = \begin{pmatrix} x & s \\ y & t \end{pmatrix}$

$$T^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} x & s \\ y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & s \\ y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ x & y \end{pmatrix} =$$

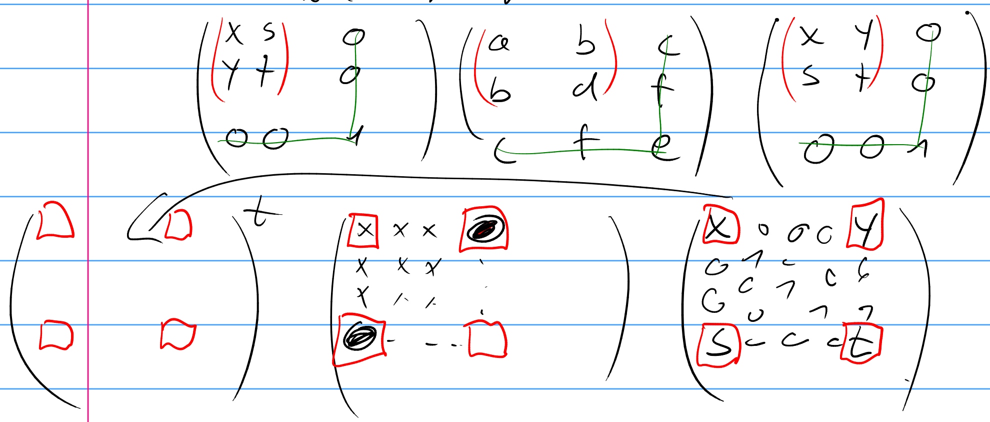
$$= \begin{pmatrix} 2xs & xt + ys \\ xt + ys & 2yt \end{pmatrix}$$ Wähle x, t, y, s so dass $xt + ys = 0$

Kein Eintrag darf 0 sein, sonst ist T nicht invertierbar.

z.B. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ oder $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ etc.

Achtung: Diese T sind dann und nur dann invertierbar, wenn $1 \neq -1$!

Bei einer beliebigen Matrix kann man obiges direkt verwenden



Schrittweise lassen sich alle off-diagonalen Einträge zu 0 transformieren ohne andere off-diagonalen Einträge zu verändern. Das lässt natürlich eine Diagonalisierung von symmetrischen Matrizen immer zu. (Ist Alternativbeweis zu obigem Satz).

<u>Satz</u>: Diagonalisierbar sind <u>nur</u> die symmetrischen Bilinearform.

(b diag. bar $\Rightarrow$ b symmetrisch) ($\dim V < \infty$).

<u>Beweis</u>: Sei $b: V \times V \to K$, V endlich dim, d.h. es gibt eine Basis B von V, so dass ($B = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$)

$$(A)_{ij} = b(e_i, e_j)$$ diagonal ist.

$$\rightarrow b(v,w) = b\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \, b(e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \, b(e_i, e_i) = b(w, v)$$

$$\left((T^t A T)^t = T^t A^t T \underset{A_{diag}}{=} T^t A T \right).$$

<u>Bemerkung</u>: Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-VR.

Jeder symmetrische Endomorphismus auf V ist diagonalisierbar.

Die entsprechende Basis, in der der Endom. diagonal ist, ist Eigenbasis des VR, kann als ONB gewählt werden.

Satz: Sei $b: V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform ($\dim K < \infty$), A eine Darstellung von b in irgendeiner Basis $\mathcal{B}$.
Dann ist b, dargestellt in einer ONB aus Eigenvektoren von A, diagonal.

Bemerkung: Da b symmetrisch, also A symmetrisch, gibt es eine ONB aus EV von A!

Beweis: Sei $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_n\}$ Basis aus Eigenvektoren von A.
Sei B die Bilinearform dargestellt in dieser Basis.

$$(B)_{ij} = b(e_i, e_j) = e_i^t A e_j \qquad (\text{dargestellt in } \mathcal{B})$$
$$= e_i^t \lambda_j e_j = \lambda_j e_i^t e_j = \lambda_j \delta_{ij}$$
$$\left(\text{d.h. } \begin{matrix} \lambda_j & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix}\right)$$

letzteres, da e_i eine ONB bilden $\langle e_i, e_j \rangle = e_i^t e_j = \delta_{ij}$

Bemerkung: Genau wie bei den Endomorphismen sind die Diagonaleinträge von B die Eigenwerte λ_i.

Bemerkung: Die "Gegenrichtung" gilt, im Gegensatz zu Endomorphismen, nicht! D.h. falls man eine Basis findet, so dass B diagonal ist, muss das keine Eigenbasis von A sein (A und B wie oben).
z.B durch Algor. zu Beginn der Vorlesung haben wir T gefunden, so dass $B = T^t A T$ diagonal ist.
T ist nicht notwendiger Weise der Basiswechsel in Basis aus Eigenvektoren.

Dazu Bsp von oben: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} x & y \\ s & t \end{pmatrix}$

$$B = T^t A T = \begin{pmatrix} 2xs & xt+ys \\ xt+ys & 2yt \end{pmatrix}$$

T soll invertierbar sein, $xt + ys = 0 \Rightarrow t = -\frac{ys}{x}$

Setze $x = 1$ $\qquad T = \begin{pmatrix} 1 & y \\ s & -ys \end{pmatrix}$

$\det T = -ys - ys = -2ys$ $\qquad$ falls $\operatorname{char} K \neq 2$, $s,t \neq 0$ ist T invertierbar.

Die meisten Wahlen von z.B. s führen dazu, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$ kein EV ist.