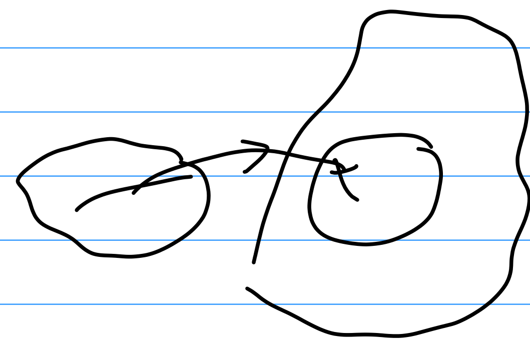
$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \dots \times V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & V_1 \otimes V_2 \dots \otimes V_n \arrow[r, "f_\psi"] & W
\end{tikzcd}$$

$$f_\psi \circ \varphi = \psi$$



$$\varphi(v_1, v_2 \dots v_n) := \underbrace{v_1 \otimes v_2 \dots \otimes v_n}_{\text{reiner Tensor}}$$

Rang: Minimale Anzahl an reinen Tensoren, die nötig sind um den Tensor darzustellen $t = \sum_j v_j \otimes w_j$

Für $n = 2$ $\quad \underbrace{\dim V_1}_{m}, \underbrace{\dim V_2}_{\ell} < \infty$

$$V_1 \otimes V_2 \cong M(m, \ell)$$

$$v_1 \otimes v_2 \longrightarrow v_1 v_2^t$$

Rang des Tensors = Rang der Matrix

Wie finde ich eine solche minimale Darstellung?

Sei $t \in V_1 \otimes V_2$ gegeben, z.B. $t = \sum_{j=1}^{i} v_j \otimes w_j$
mit $v_j \in V_1$ $\quad w_j \in V_2$.

Vorgehen: 1. Schritt: Finde die zu t gehörige Matrix A.
$$A = \sum_{j=1}^{i} v_j w_j^t.$$

2. Schritt: Transformiere A auf elementare Form, d.h.
suche S und T (jeweils invertierbar)
so dass $B = SAT$ $\quad b_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$
$b_{ii} = 1$ für $i \le i_0$
$b_{ii} = 0$ sonst

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad i_0 = 3$$

$$B = \sum_{i=1}^{i_0} e_j \tilde{e}_j^t \Rightarrow A = \sum_{i=1}^{i_0} (S^{-1} e_j) \cdot (T^{-1} \tilde{e}_j)^t$$

Aus letzten Satz: $k = \text{rang } A = \text{rang } B = i_0$

$$A = \sum_{i=1}^{k} (S^{-1} e_j) \cdot (T^{-1} \tilde{e}_j)^t$$

$$\Downarrow$$

$$t = \sum_{i=1}^{k} (S^{-1} e_j) \otimes (T^{-1} \tilde{e}_j)$$

Rechenregeln: a) $(\lambda v) \otimes w = \lambda \cdot v \otimes w = v \otimes (\lambda w)$

b) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$

"+" in V_2 "+" in $V_1 \otimes V_2$

$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$

c) $v \otimes 0 = 0 \otimes w = 0$

Beweis: Die Regeln folgen direkt aus der Multilinearität von f:

a) $(\lambda v) \otimes w =: f(\lambda v, w) = \lambda (f(v,w)) = f(v, \lambda w)$

b) analog

c) $2 \cdot \underbrace{f(v,0)}_{\vec{a}} = f(v, 2 \cdot 0) = f(v,0)$

$2\vec{a} = \vec{a} \quad \xRightarrow{-\vec{a}} \quad \vec{a} = 0$

Analoge Regeln gelten für $n > 2$.

Satz: Seien U, V, W K-Vektorräume. Dann gilt:

a) $V \otimes W \cong W \otimes V$

Der entsprechende Isomorphismus ist $x \otimes y \to y \otimes x$

b) $(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U) \cong V \otimes W \otimes U$

$(x \otimes y) \otimes z \to x \otimes (y \otimes z) \to x \otimes y \otimes z$

c) $(V \oplus W) \otimes U \cong (V \otimes U) \oplus (W \otimes U)$

$(x, y) \otimes z \longrightarrow (x \otimes z, y \otimes z)$

$(x + y) \otimes z \longrightarrow x \otimes z + y \otimes z$

d) $K \otimes V \cong V$

$\lambda \otimes v \to \lambda v$

<u>Beweis</u>: Über die Basisbetrachtung sind diese Aussagen klar. Man kann alternativ auch über die definierende Eigenschaft direkt die Isomorphien zeigen. Letzteres gilt dann auch für Moduln über kommutativen Ringen.

a) Betrachte die Abbildung $f: x \otimes y \to y \otimes x$

f sei linear.

$$\begin{tikzcd} V, W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & V \otimes W \arrow[r, "f_\psi"] & W \otimes V \end{tikzcd}$$

$\psi(x, y) = y \otimes x$

Def. E: $\exists!\, f_\psi$ so dass $f_\psi \circ \varphi = \psi$

d. h. $f_\psi \circ \varphi(x, y) = \psi(x, y)$

$$f_\psi(x \otimes y) = y \otimes x$$

Bijektivität: f ist injektiv und surjektiv

betrachte ein beliebiges $t \in W \otimes V$

$t = \sum_{j=1}^{n} w_j \otimes v_j \Rightarrow t = f_\psi\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \otimes w_j\right)$

$\Rightarrow f_\psi$ ist surjektiv. $\operatorname{Ker} f_\psi = \{0\} \Rightarrow$ injektiv

d) $K \otimes V$: $f: \lambda \otimes v \to \lambda \cdot v$

Diese Abbildung ist nach surjektiv, da

da $1 \otimes v \to v$

und injektiv, da

$$f(t) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \otimes v_j\right) = 0$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^{l} 1 \otimes (\lambda_j v_j)\right) = 0 \Rightarrow f\left(1 \otimes \sum_{j=1}^{l} \lambda_j v_j\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{l} \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow t = 0.$$

Wir sehen, dass $K \otimes V$ nur aus reinen Tensoren besteht!

$$\left(1 \otimes v \overset{\cong}{\to} v \right)$$

Lineare Abbildungen und Tensorprodukt

Satz: Es seien V, V', V'', W, W', W'' K-Vektorräume $f: V \to V'$, $f': V' \to V''$, $g: W \to W'$, $g': W' \to W''$ Homomorphismen. Dann gilt

a) Es gibt genau einen Homomorphismus $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ mit der Eigenschaft $f \otimes g\,(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) \quad \forall\, x \in V\ y \in W$.

b) $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$ ist ebenfalls ein Homomorphismus

Beweis:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & V \otimes W \arrow[r, "f_\psi"] & V' \otimes W' \end{tikzcd}$$

Betrachte $\psi : V \times W \to V' \otimes W'$ gegeben durch

$$(x,y) \to f(x) \otimes g(y)$$

ψ ist offensichtlich bilinear:

z.B. $(x_1 + x_2, y) \to f(x_1+x_2) \otimes g(y) = (f(x_1)+f(x_2)) \otimes g(y)$

$$= f(x_1) \otimes g(y) + f(x_2) \otimes g(y) \quad \checkmark$$

(Multiplikation mit Skalar analog:

$$(\lambda x, y) \to f(\lambda x) \otimes g(y) = (\lambda f(x)) \otimes g(y) =$$
$$= \lambda (f(x) \otimes g(y)))$$

Auf Grund der definierenden Eigenschaft $\exists ! \, f_\psi$ mit

$$f_\psi \circ \varphi = \psi$$
$$f_\psi \circ \varphi (x,y) = f_\psi (x \otimes y) = \psi(x,y) = f(x) \otimes g(y)$$

Dieses f_ψ nennen wir also $f \otimes g$

b) Betrachte die beiden genannten Abbildungen zunächst auf den reinen Tensoren

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) \, (x \otimes y) = (f' \circ f)(x) \otimes (g' \circ g)(y)$$

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)(x \otimes y) = f' \otimes g' \big(f(x) \otimes g(y) \big) =$$

$$= f'(f(x)) \otimes g'(g(y)) = (f' \circ f)(x) \otimes (g' \circ g)(y)$$

Da die Abbildungen auf reinen Tensoren identisch sind und es sich um lineare Abbildungen handelt sind sie auf dem ganzen Tensorprodukt identisch.
Linearität der beiden Abbildungen folgt, da die Tensorbildung und die Komposition Linearität erhält.

Beispiel (Komplexifizierung): Sei V ein Vektorraum zum Körper $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. D.h. wir können das Tensorprodukt

$$V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes V \quad \text{bilden.}$$

und erhalten so einen neuen $\mathbb{R}$-Vektorraum. ($V_{\mathbb{C}}$ nennt man Komplexifizierung).

Die Menge $V_{\mathbb{C}}$ kann zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum umgewandelt werden durch Definition der folgenden Verknüpfung: $\lambda \cdot (\mu \otimes v) := (\lambda \mu) \otimes v$

Diese Verknüpfung ist zunächst auf reinen Tensoren definiert und geht von $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \otimes V) \longrightarrow \mathbb{C} \times V$

$$\mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$$

Es ist einfach zu zeigen, dass $V_{\mathbb{C}}$ zusammen mit $+$ und dieser Verknüpfung alle Vektorraumaxiome erfüllt.