Satz: Obige Eigenschaft gilt genauso für Normalteiler.
Die Abbildung $f : \{U : U \trianglelefteq G,\ N \trianglelefteq G\}$ nach $\{\bar{U} : \bar{U} \trianglelefteq G/N\}$ definiert durch $f(U) := U/N$ ist bijektiv
(Wie oben ist G Gruppe und $N \trianglelefteq G$)

Beweis: analog. Der einzige zusätzliche Punkt ist die Formel für die Normalteilereigenschaft: „$gug^{-1} \in U$". Diese Eigenschaft wird einfach vererbt, wenn sie für jedes Element der Nebenklasse gilt, gilt sie für die ganze Nebenklasse.

Isomorphiesätze

Die Isomorphie zwischen Gruppen hilft uns, die Eigenschaften verschiedener Gruppen zusammenzufassen. Das spart Arbeit bei der prinzipiellen Diskussion von Gruppeneigenschaften oder hilft bekanntes einer schon behandelten Gruppe bei dazu isomorphen wiederzufinden.

Satz: (Homomorphiesatz): Sei $\alpha : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.
Dann ist die Abbildung $\bar{\alpha} : G/_{\ker\alpha} \to \operatorname{Im}\alpha$ definiert durch
$\bar{\alpha}(\bar{g}) := \alpha(g)$ ist ein Isomorphismus.

Beweisidee:

Wir werfen Elemente, die nicht in Bild sind raus und erhalten schonmal die Surjektivität.

Beweis: $\ker\alpha$ ist, wie oben gezeigt, ein Normalteiler.
Dadurch ist $G/_{\ker\alpha}$ selbst eine Gruppe.
$\bar{\alpha}$ geht von Gruppe nach Gruppe, aber ist $\bar{\alpha}$ wohldefiniert?
In diesem Fall: $\alpha(g) = \alpha(h)$ falls $g,h \in \bar{g}$ $(g \sim h : gh^{-1} \in \ker\alpha)$

$\alpha(g)\cdot\alpha(h^{-1}) = \alpha(gh^{-1}) = e \Leftarrow$ falls $g,h \in \bar{g}$

$\overset{\shortparallel}{\alpha(g)\cdot\alpha(h)^{-1}} \Rightarrow \alpha(h)^{-1}$ ist inverses zu $\alpha(g)$

$\Rightarrow \alpha(h) = \alpha(g)$ wegen Eind. des Inversen.

"Gruppenhomomorphismus": z.z: $\bar\alpha(\bar g \, \bar h) = \bar\alpha(\bar g)\cdot \bar\alpha(\bar h)$

$$\bar\alpha(\bar g \, \bar h) = \alpha(g\, h) \qquad \text{da} \qquad g\cdot h \in \bar g \, \bar h$$
$$= \alpha(g)\, \alpha(h) = \bar\alpha(\bar g)\cdot \bar\alpha(\bar h) \qquad \square$$

"Surjektivität": per Konstruktion, wir haben ja alles, was nicht im Bild ist, entfernt. $\operatorname{Im}(\bar\alpha) = \operatorname{Im}(\alpha)$ per def.

"Injektivität": Sei $\bar\alpha(\bar g) = \bar\alpha(\bar h)$ z.z. $\bar g = \bar h$

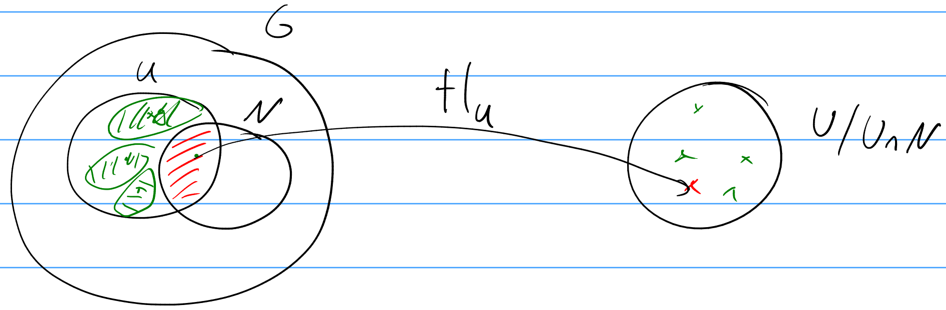
$$\bar\alpha(\bar g) = \bar\alpha(\bar h) \Rightarrow \bar\alpha(\bar g)\cdot\bar\alpha(\bar h)^{-1} = e$$
$$\Rightarrow e = \alpha(g)\cdot\alpha(h)^{-1} = \alpha(g\, h^{-1}) \Rightarrow g h^{-1} \in \operatorname{Ker} \alpha$$
$$\Rightarrow g \sim h \Rightarrow g, h \text{ sind}$$
Elemente der selben Nebenklasse

d.h. $\bar g = \bar h$.

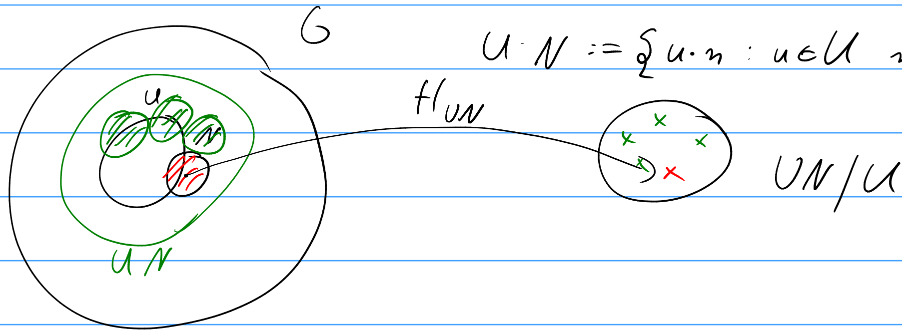
Satz: (1. Isomorphiesatz): Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $U \leq G$.

Dann sind isomorph: $U/U\cap N$ und UN/N

Beweis:



$U \cdot N := \{u \cdot n : u \in U \;\; n \in N\}$



$U \cap N$ ist Normalteiler von U (s.o.) $\Rightarrow$ $U/U\cap N$ ist Gruppe

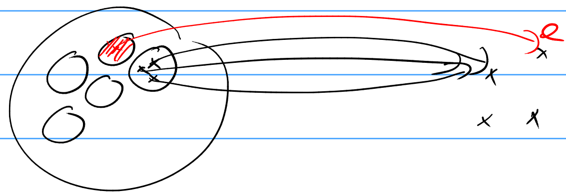
N " " " UN (s.o.) $\Rightarrow$ UN/N ist Gruppe.

(UN ist eine Gruppe, siehe oben).

Sei f der Homomorphismus, der jedes Element von G auf die entsprechende Nebenklasse bzgl. N abbildet

$$f: G \to G/N \quad \text{(kanonisch)}$$

$$f(g) = \bar{g}$$



Betrachte $f|_U$ und benutze Homomorphiesatz.

$$f|_U : U \longrightarrow G/N$$

Der Ker$(f|_U) = N \cap U$ (alles, was in U und im Ker f)

$\underset{\text{Hom. Satz}}{\Rightarrow}$ $\boxed{U/N \cap U \cong \mathrm{Im}\, f|_U}$

Betrachte $f|_{UN}$ $\qquad f|_{UN} : UN \longrightarrow G/N$

Ker $f|_{UN} = N$ $\underset{\text{Hom. Satz}}{\Rightarrow}$ $\boxed{UN/N \cong \mathrm{Im}\, f|_{UN}}$

f bringt jedes Element aus N auf e.

$$f(u \cdot n) = f(u) \cdot f(n) = f(u)$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f|_U = \mathrm{Im}\, f|_{UN}$