Gruppenhomomorphismen

Definition: Seien $(G,\circ)$ und $(H,\oplus)$ Gruppen. Eine Abbildung $f: G \to H$ nennt man Homomorphismus (Gruppenh.) $:\Longleftrightarrow$

$$\forall a,b \in G \quad \text{gilt: } f(a\circ b) = f(a) \oplus f(b)$$

Satz: Seien $(G,\circ), (H,\oplus), (I,\odot)$ Gruppen, $f: G\to H$ und $g: H \to I$ Homomorphismen, dann ist auch $g \circ f : G \to I$ ebenfalls ein Homomorphismus.

nicht die Verknüpfung sondern Komp. von Abbildungen!

Beweis: z.z. unter den genannten Vorr.: $(g\circ f)(a\circ b) = (g\circ f)(a) \odot (g\circ f)(b)$

$$(g\circ f)(a\circ b) = g\left[f(a\circ b)\right] = g\left[f(a)\oplus f(b)\right] = g(f(a)) \odot g(f(b)) =$$
$$= (g\circ f)(a) \odot (g\circ f)(b)$$

Satz: Für jeden Gruppenhomomorphismus $f: G\to H$ gilt:

a) $f(e_G) = e_H$ (e_G neutrales E. in G, e_H in H)

b) $f(a^{-1_G}) = \left[f(a)\right]^{-1_H}$

Beweis: a) $\underbrace{f(e_G\circ a)}_{f(a)} = f(e_G)\circ f(a)$ gilt für alle $a\in G$ $\quad | \cdot \{f(a)\}^{-1}$ von rechts

$$e_H = f(e_G)\circ f(a) \circ \{f(a)\}^{-1} = f(e_G)$$

b) Betrachte $f(a)\circ \boxed{f(a^{-1})} = f(a\circ a^{-1}) = f(e_G) = e_H$

$\Downarrow$

$f(a^{-1})$ ist das Inverse von $f(a)$ $\quad f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

Bemerkung: Ein Homomorphismus ist dementsprechend mit allen Gruppenaxiomen im Einklang.

Bezeichnungen: Ein Gruppenhomomorphismus $f: G\to H$ heißt

a) Epimorphismus $:\Longleftrightarrow$ f surjektiv

b) Monomorphismus $:\Longleftrightarrow$ f injektiv

c) Isomorphismus $:\Longleftrightarrow$ f bijektiv

d) Endomorphismus $:\Longleftrightarrow$ $G = H$

e) Automorphismus $:\Longleftrightarrow$ f bijektiv und $G = H$

Zwei Gruppen $(G,\circ)$, $(H,\oplus)$ heißen Isomorph, falls man einen Isomorphismus $f: G \to H$ finden kann.

<u>Satz:</u> Sei $f: G \to H$ Homomorphismus. $U \leq G$ $V \leq H$

Dann gilt $f(U) \leq H$ und $f^{-1}(V) \leq G$.

Hier ist $f(U) = \{x \in H : \exists\, a \in U \text{ so dass } x = f(a)\}$

$f^{-1}(V) = \{x \in G : f(x) \in V\}$

<u>Beweis:</u> (Untergruppe: $a \in U$ und $b \in U \Rightarrow a \circ b \in U$ und $a^{-1} \in U$)

Sei also $U \leq G$. z.z. $f(U) \leq H$.

Wähle $a, b \in f(U)$ beliebig. $\Rightarrow \exists\, x, y \in U$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$

$a \oplus b = f(x) \oplus f(y) = f(\underbrace{x \circ y}_{\in U})$ $x \circ y \in U$, da $U \leq G$

$\Rightarrow \boxed{a \oplus b \in f(U)}$

$a^{-1} = [f(x)]^{-1} \underset{\uparrow \text{ f ist Homom.}}{=} f(\underbrace{x^{-1}}_{\in U})$ $x \in U \Rightarrow x^{-1} \in U$ $(U \leq G)$

$\Rightarrow f(x^{-1}) \in f(U)$ d.h. $\boxed{a^{-1} \in f(U)}$ $\Rightarrow f(U) \leq H$

Sei nun $V \leq H$. z.z. $f^{-1}(V) \leq G$

Wähle dazu $a, b \in f^{-1}(V)$ beliebig, d.h. $\boxed{f(a) \in V,\ f(b) \in V}$

z.z. $a \circ b \in f^{-1}(V)$? $\underbrace{f(a) \oplus f(b)}_{\in V} \underset{\uparrow \text{ f ist Homom.}}{=} f(a \circ b) \in V$

Außerdem ist $f(a) \oplus f(b) \in V$ da $V \leq H$

$\Rightarrow a \circ b \in f^{-1}(V)$

z.z. $a^{-1} \in f^{-1}(V)$: $f(a^{-1}) = \underbrace{[\underbrace{f(a)}_{\in V}]^{-1}}_{\in V \text{ da } V \leq H} \in V$

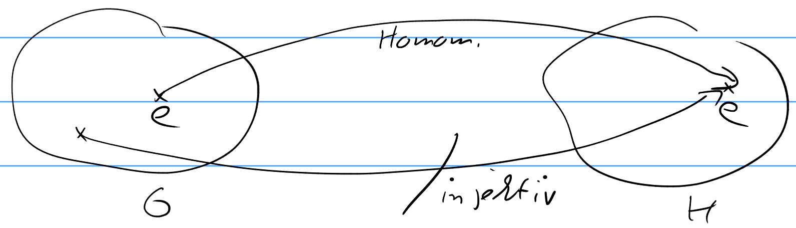
$\Rightarrow a^{-1} \in f^{-1}(V)$ (da f wirkend auf a^{-1} in V landet).

Definition: Sei $(G,\circ)$, $(H,\oplus)$ Gruppen, $f: G \to H$ Homomorph.
Dann nennt man die Menge
$$\ker(f) := f^{-1}(e_H)$$ den **Kern** von f und
die Menge
$$\operatorname{Im}(f) := f(G)$$ das **Bild** von f.

Folgerung: Aus dem letzten Satz folgt direkt, dass
$$\ker(f) \leq G \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(f) \leq H.$$

Satz: a) f surjektiv $\iff \operatorname{Im}(f) = H$
b) f injektiv $\iff \ker(f) = \{e_G\}$

Beweis: a) praktisch eine Tautologie: „f erreicht die gesamte Menge H"
b) „$\Rightarrow$" $e_G \in \ker(f)$ da $f(e_G) = e_H$ immer gilt nach Satz.
Falls f injektiv kann es kein weiteres Element geben, welches auf e_H abgebildet wird $\Rightarrow \ker(f) = \{e_G\}$



„$\Leftarrow$" z.z. $f(x) = f(y) \Rightarrow \boxed{x = y}$
Sei $f(x) = f(y)$ d.h. $f(x) \oplus (f(y))^{-1} = e_H$
$\Rightarrow f(x) \oplus (f(y))^{-1} = f(x) \oplus f(y^{-1}) = f(x \circ y^{-1}) = e_H$
f Homom.
Da $\ker(f)$ nach Vor. nur e_G enthält $\Rightarrow x \circ y^{-1} = e_G$
$$\boxed{x = x \circ y^{-1} \circ y = e_G \circ y = y}$$ $\square$