Ring $(R,+,\cdot)$ $\qquad$ $(R,+)$ abelsche Gruppe

Ass.: $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

"1": $a\cdot 1 = 1\cdot a = a \quad \forall a \in R$

$(a+b)c = ac + bc$ und $a(b+c) = ab + ac$

<u>Rechenregeln</u>: Es sei R ein Ring mit Eins. Für a,b,c gelten dann

a) $-(-a) = a$

b) $a+b = c \Leftrightarrow a = c-b \qquad (c-b := c+(-b))$

c) $-(a+b) = -a + (-b) = -a-b$

d) $0\cdot a = a\cdot 0 = 0$

e) $(-a)b = a(-b) = -(a\cdot b)$

f) $(-a)(-b) = ab$

g) $a(b-c) = ab - ac$

h) Für $a\in R^*$ so ist auch $a^{-1}\in R^*$ und es gilt $(a^{-1})^{-1} = a$

<u>Beweis</u>: a) b) c) betreffen nur $(R,+)$. Da dies eine abelsche Gruppe gelten alle Regeln für abelsche Gruppen insbesondere diese hier.

d) $\cancel{0\cdot a} = (0+0)\cdot a = \cancel{0\cdot a} + 0\cdot a$

$0 = 0\cdot a \quad , \quad a\cdot 0 = 0$ analog.

e) Betrachte: $\boxed{a\cdot b} + \boxed{(-a)\cdot b} = (a-a)\cdot b = 0\cdot b = 0$

$\Rightarrow \boxed{(-a)b = -(a\cdot b)}$

$a(-b) = -(a\cdot b)$ geht analog.

f) $(-a)(\boxed{-b}) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = a\cdot b$

g) Betrachte: $a(b \overset{+(-c)}{-c}) = ab + a(-c) = a\cdot b + (-(ac)) =$

$= (a\cdot b) - (a\cdot c)$

h) Erinnerung: $R^* = \{x\in R : \exists\, x^{-1}\in R, \text{ so dass } xx^{-1} = x^{-1}x = 1\}$

Zunächst gilt, dass das inverse eindeutig ist!

Seien $x x^{-1} = 1, x^{-1}x = 1$ und $x a^{-1} = 1$, $a^{-1}x = 1$ dann gilt:

$$x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} =$$
$$= a^{-1} x \cdot x^{-1} = a^{-1} \cdot 1 = a^{-1}$$

$$\boxed{(a^{-1})^{-1}} \cdot a^{-1} = 1 = \boxed{a \cdot} \, a^{-1}$$

a^{-1} ist also invertierbar, da $a a^{-1} = a^{-1} a = 1$

Wegen der Eindeutigkeit des Inversen ist $(a^{-1})^{-1} = a$ die einzige Möglichkeit.