Satz: (Trägheitssatz von Sylvester) a) Sei V endlichdim. VR über $\mathbb{R}$ $char(K) \neq 2$. Sei $b: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. $\exists$ eine Basis B von V, so dass

$$M_B(b) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & & \\ & -\mathbb{1}_l & \\ & & 0_{n-k-l} \end{pmatrix} \quad \text{mit } k, l \in \mathbb{N}_0;\ k+l \leq n. \quad n = \dim V$$

$\mathbb{1}_k$ ist die $k \times k$ Einheitsmatrix etc.

Anders gesprochen: Auf der Diagonalen befinden sich zunächst k einser, dann l mal die -1, Rest Nullen, dabei ist die Matrix diagonal.

b) k, l hängen nicht von der Wahl von B ab.

Beweis: a) Wir haben bereits gezeigt, dass b unter obigen Bedingungen diagonalisiert werden kann. $\exists$ Basis $\mathcal{A} = \{e_1, .., e_n\}$ so dass $M_{\mathcal{A}}(b)$ diagonal ist.

$$M_{\mathcal{A}}(b) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wählen wir die Basis $\tilde{\mathcal{A}} = (\alpha e_1, \dots e_n)$ so erhält man

$$M_{\tilde{\mathcal{A}}}(b) = \begin{pmatrix} \alpha^2 \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wir können durch Wahl von α dafür sorgen, dass der erste Diagonaleintrag $+1, -1$ oder 0 ist.

Selbiges Vorgehen bei allen anderen Einträgen und ggf. Umsortieren der Basiselemente liefert obige Aussage.

b) Definiere folgende Zahlen:

$$a := \max\{\dim U : U \leq V \text{ mit } b(x,x) > 0 \ \forall x \in U \setminus \{0\}\}$$
$$b := \max\{\dim U : U \leq V \text{ mit } b(x,x) < 0 \ \forall x \in U \setminus \{0\}\}$$
$$c := \max\{\dim U : U \leq V \text{ mit } b(x,x) = 0 \ \forall x \in U\}$$

a, b, c sind unabhängig von der Wahl der Basis.

Es gilt, dass die entsprechenden Untervektorräume Schnitt 0 haben. Wähle U_a so dass $\dim U_a = a$, $b(x,x) > 0 \ \forall x \in U_a \setminus \{0\}$

U_b ... $\dim U_b = b$, $b(x,x) < 0 \ \forall x \in U_b \setminus \{0\}$

U_c ... $\dim U_c = c$ $b(x,x) = 0 \ \forall x \in U_c$

$$U_b \cap U_a = \{0\} = U_b \cap U_c = U_a \cap U_c$$

$$\Rightarrow \quad \dim U_a + \dim U_b + \dim U_c \leq n$$
$$\boxed{a + b + c \leq n}$$

Sei $U = \operatorname{span}\{e_1, \dots e_k\}$ falls $B = \{e_1 \dots e_n\}$ eine Wahl gemäß Teil a) ist.

Für alle $x \in U$ gilt $b(x,x) = \sum_{i,j=1}^{k} b(\alpha_i e_i, \alpha_j e_j)$, $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$

$$b(x,x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \, b(x_i, x_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 > 0$$

$\Rightarrow$ $k \leq a$

ebenso: $l \leq b$ und $n - l - k \leq c$

$$n = k + l + (n-k-l) \leq a + b + c \leq n$$

es muss jeweils das "=" gelten. Falls nur bei einer der vier benutzten Ungleichungen das "<" gilt erhalten wir $n < n$ ↯

$\Rightarrow$ $k = a$ $\quad l = b$ $\quad n - l - k = c$

Basisunabhängig. $\Rightarrow$ k, l unabhängig von Basiswahl.

Darstellung von Endomorphismen vs. Bilinearformen

Sowohl Endomorphismen $f: V \to V$ als auch Bilinearformen $b: V \times V \to K$ von endlichdimensionalen VR über K ($\operatorname{char} K \neq 2$) lassen sich durch $n \times n$ Matrizen darstellen, indem man eine entsprechende Basis B des VR wählt.

	Endomorphismen	Bilinearform
symmetrischer Fall ✓	diagonalisierbar	diagonalisierbar
✗	∃ nicht symmetrische, die diag.bar.	nur symmetrische diag. bar.
Basiswechsel ✗	$T^{-1} A T$, T invbar	$T^t A T$, T invbar
Trägheitssatz ✗	gilt nicht, auf Diagonalen immer die Eigenwerte	gilt. Beträge der Diagonalel. basisabhängig.
Eigenbasis ✓	Darstellung ist diagonal	Darstellung diagonal
✗	Einzige Möglichkeit der diagonal.	∃ auch andere Basen, so dass Darstellung diagonal.

Dualraum

Wir betrachten lineare Abbildungen von einem Vektorraum in den Körper.

Definition: Sei V ein K-VR. Dann nennt man die Menge aller linearen Abbildungen von V in den Körper K Dualraum.

$$V^* := \{ f: V \to K \,;\, f \text{ ist linear} \}$$

Satz: Für jeden VR V ist V^* ebenfalls ein VR (über K)

Beweis: $f: V \to K$ linear und $g: V \to K$ linear

dann ist $\alpha f + g : V \to K$ linear $\forall \alpha \in K$.

Dazu: $(\alpha f + g)(ax+y) = \alpha \cdot f(ax+y) + g(ax+y) = a\,\alpha f(x) + \alpha f(y) + a g(x) + g(y)$

$= a(\alpha f + g)(x) + (\alpha f + g)(y)$ (Siehe auch lin. Alg I: $\{V \to W \text{ linear}\}$ ist VR)

Betrachten wir zunächst $V = \mathbb{R}^n$. Der VR ist also die Menge aller Spaltenvektoren.

Die Menge aller linearen Abbildungen in den Körper ist (siehe lin. Alg. I) die Menge aller $(1 \times n)$-Matrizen, d.h. die Menge aller Zeilenvektoren mit n Einträgen.

$\dim V^* = n$ und es existiert ein natürlicher Isomorphismus $V \to V^*$

Satz: Sei V endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind V und V^* isomorph.

Beweis: $V \sim \mathbb{R}^n \sim (\mathbb{R}^n)^* \sim V^*$ "$\sim$" ist isomorph zu.

Darstellung nach Wahl einer Basis

Darstellung als lin. Abb.

Bemerkung: Für unendlichdimensionale VR besteht in der Regel keine Isomorphie zwischen V und V^*.

Beispiel: Sei V die Menge aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Für jedes $g \in V$ kann man eine lineare Abbildung $g^*: V \to K$ definieren via: $g^*(f) := \int_0^1 g(x) \cdot f(x)\, dx$

Dies ist in der Tat $\forall f, g \in V$ wohldefiniert und linear.

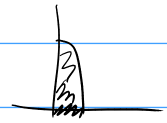
$g \to g^*$ ist ebenfalls linear ($g^* \in V^*$)

Es gibt aber noch weitere lineare Abbildungen von $V \to K$.
z.B. jene, die jeder Funktion den Funktionswert bei 0 zuweist.
(bzw einem anderen x-Wert).

$$(\alpha f + h)(0) = \alpha f(0) + h(0)$$

$f \to f(0)$ ist also linear.

Das kann niemals durch ein Integral gegen eine Funktion g ausgedrückt werden. Der Wert solcher Integrale ist entweder 0 oder abhängig von "vielen Stellen x".



g

Man sieht $V \neq V^*$

<u>Bemerkung</u>: Für $V = \mathbb{R}^n$ hatten wir den natürlichen Isomorphismus in den Dualraum, der $v \to v^t$

Spaltenvektor in $\mathbb{R}^n$ — Zeilenvektor $M(1 \times n)$

V — V^*

Gegeben zwei Vektoren $v \in V$ und w^* aus V^*

$$w^*(v) = w \cdot v = \langle \underbrace{w^t, v}_{\in V} \rangle$$

Der Begriff "Dualraum" klärt sich dadurch, dass in diesem Fall
$(V^*)^* \hat{=} V$ ergibt $\qquad (v^t)^t = v$.