f, g lineare Abbildungen

$\boxed{f \otimes g}$: $\quad (f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$

Beispiel: Tensorprodukt von Matrizen.

Sei $A \in M(n' \times n)$ $\quad B \in M(m' \times m)$.

Diese Matrizen stehen einerseits für lineare Abbildungen

$$A : K^n \to K^{n'} \qquad B : K^m \to K^{m'}$$

Daher gilt nach obigem Satz: Es gibt genau eine lineare Abbildung (d.h. genau eine Matrix) mit

$$(A \otimes B) \cdot (x \otimes y) = Ax \otimes By$$

$A \otimes B$ ist also eine Abbildung von $\boxed{K^n \otimes K^m} \to \boxed{K^{n'} \otimes K^{m'}}$

$K^n \otimes K^m$ kann ganz natürlich mit dem $K^{n \cdot m}$ identifiziert werden, ($K^{n'} \otimes K^{m'}$ mit $K^{n'm'}$).

Diese Identifikation läuft einfach über die Basis:

$\{e_1, \dots, e_n\}$ ist Basis von K^n

$\{e_1, \dots, e_m\}$ ist Basis von K^m

$\Rightarrow \quad \{e_i \otimes e_j : i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$ ist Basis von $K^n \otimes K^m$.

„Sortierung" der entsprechenden Basiselemente über:

$$e_i \otimes e_j \longrightarrow e_{(i-1)m + j}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \{\overset{1}{e_1 \otimes e_1}, & \overset{2}{e_1 \otimes e_2}, & \overset{3}{e_1 \otimes e_3} \dots & \overset{m}{e_1 \otimes e_m}, \\ \overset{m+1}{e_2 \otimes e_1}, & \dots & & \overset{2m}{e_2 \otimes e_m}, \\ \vdots & & & \\ e_n \otimes e_1, & & & e_n \otimes e_m \} \end{matrix}}_{\text{Basis von } K^n \otimes K^m} \qquad \begin{matrix} \{e_1, e_2, \dots e_m \\ e_{m+1} \dots e_{nm}\} \end{matrix}$$

Analog können wir $K^{n'} \otimes K^{m'}$ mit $K^{n'm'}$ identifizieren

Das oben definierte $\underline{A} \otimes \underline{B}$ ist zunächst eine lineare Abbildung. Wir können die entsprechende darstellende Matrix betrachten.

Dazu definieren wir $t(A,B)$ über:

$$t(A,B) = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} B} & \boxed{a_{12} B} & \cdots & a_{1n} B \\ \vdots & & & \\ a_{n'1} B & \cdots & & a_{n'n} B \end{pmatrix} \in M(nn' \times nm)$$

Bsp: jeweils 2×2 Matrizen

$$t(A,B) = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{pmatrix}$$

Beh: Darstellende Matrix von $\underline{A} \otimes \underline{B}$ ist $t(A,B)$

Dies sieht man, wenn man $\underline{A} \otimes \underline{B}$ auf ein beliebiges Basiselement $e_i \otimes e_j$ anwendet.

$$(\underline{A} \otimes \underline{B})(\boxed{e_i \otimes e_j}) := A e_i \otimes B e_j = \sum_{k=1}^{n'} a_{ki} e_k \otimes \sum_{l=1}^{m'} b_{lj} e_l$$

$\hat{=}\, e_{(i-1)m+j}$

$$= \sum_{\substack{k=1,\dots,n' \\ l=1,\dots,m'}} a_{ki} b_{lj} \, e_k \otimes e_l \quad \hat{=}\, e_{(k-1)m'+l}$$

$\downarrow$ Darstellung

Frage: Bildet $t(A,B)$ in der Tat den $e_{(i-1)m+j}$ auf $\sum_{\substack{k=1\dots n' \\ l=1\dots m'}} a_{ki} b_{lj} \, e_{(k-1)m'+l}$ ab?

Ja, dies liegt an der Definition von $t(A,B)$:

$e_{(k-1)m'+l}$ liefert die k. Spalte der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

und in dieser die l.te Spalte von B

$$\begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}b_{11} \quad a_{11}b_{12} \quad \cdots}^{m'} \;\Big|\; a_{12}b_{1} \cdots \\ \\ \\ \end{pmatrix} e_{(k-1)m'+l}$$

Bsp 2×2 Fall wähle $k = 2$ und $l = 1$ $\Rightarrow$

$e_{(k-1)m'+l} = e_3$ ergibt

$$\begin{pmatrix} a_{12}b_{11} \\ a_{12}b_{21} \\ a_{22}b_{11} \\ a_{22}b_{21} \end{pmatrix} = a_{12}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{21}$$

$t(A,B)$ ist aber genau das Tensorprodukt von A und B als Elemente des Vektorraumes $M(n' \times n)$ bzw $M(m' \times m)$.