Satz: Seien $f: V \to V'$ und $g: W \to W'$ lineare Abbildungen.
Dann ist $\operatorname{Im}(f \otimes g) = \operatorname{Im} f \otimes \operatorname{Im} g$

Beweis: Sei $\{x_i : i \in I\}$ eine Basis von V und
$\{y_j : j \in J\}$ eine Basis von W.
Es gilt, dass $\{f(x_i) : i \in I\}$ und $\{g(y_j) : j \in J\}$
sind Erzeugendensysteme von $\operatorname{Im} f$ bzw. $\operatorname{Im} g$.

Außerdem ist $\boxed{\{f(x_i) \otimes g(y_j) : i \in I, j \in J\}}$ ist ein
Erzeugendensystem von $\operatorname{Im}(f \otimes g)$, da
$\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ Basis von $V \times W$ ist
$\Rightarrow \{\underbrace{(f \otimes g)(x_i \otimes y_j)}_{:= f(x_i) \otimes g(y_j)} : i \in I, j \in J\}$ Basis von $\operatorname{Im}(f \otimes g)$

Diese Menge ist aber auch ein Erzeugendensystem
von $\operatorname{Im} f \otimes \operatorname{Im} g$ da jedes Element des
Tensorproduktes als Linearkombination reiner
Tensoren geschrieben werden kann.
$v \in \operatorname{Im} f$ und $w \in \operatorname{Im} g$
kann je als Linearkombination der Mengen
$\{f(x_i) : i \in I\}$ bzw. $\{g(y_j) : j \in J\}$ geschrieben.

Tensorprodukt und Dualraum

Satz: Es sei V, W endlichdimensionale Vektorräume über
dem Körper K. Dann gilt:

a) Es gibt genau eine lineare Abbildung
$$\alpha : V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*$$
mit der Eigenschaft, daß für alle $f \in V^*, g \in W^*, x \in V, y \in W$
gilt: $\alpha(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \cdot g(y)$.
Diese ist ein Isomorphismus.

b) Es gibt genau eine lineare Abbildung

$$\beta : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W)$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $f \in V^*, x \in V, y \in W$ gilt:

$$\beta(f \otimes y)(x) = f(x) \cdot y$$

[$V^* \otimes W \ni (f \otimes y)$ kann man in natürliche Weise auf ein Element x aus V wirken lassen indem man

$$\underbrace{f(x)}_{\in K} \otimes y = 1 \otimes f(x) y \;\hat{=}\; f(x) y \quad]$$

Beweis a) Da f und g lineare Abbildungen sind $(V \to K,\ W \to K)$ ist die Abbildung

$\psi : V \times W \to K$ gegeben durch $\psi(x,y) = f(x)\, g(y)$

bilinear.

Daher gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$f_\psi : V \otimes W \to K$ mit $x \otimes y \to f(x) \cdot g(y)$

$$\begin{tikzcd} V, W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & V \otimes W \arrow[r, "f_\psi"] & K \end{tikzcd}$$

Diese f_ψ ist genau $\alpha(f \otimes g)$.

<u>Bijektivität</u>: Sei $B = (x_1, \dots x_n)$ $A = (y_1, \dots y_m)$ Basen von V bzw. W.

Dann gibt es Basen $B^* = (x_1^* \dots x_n^*)$, $A^* = (y_1^* \dots y_n^*)$ von V^* und W^*

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \qquad y_i^*(y_j) = \delta_{ij}.$$

Es ist $C = (x_i^* \otimes y_j^* : i \in \{1, \dots n\}, j \in \{1, \dots m\})$ eine Basis von $V^* \otimes W^*$.

Was macht α mit einem bel. Basiselement?

$$\boxed{\alpha(x_i^* \otimes y_j^*)}(x_e \otimes y_k) = x_i^*(x_e) \cdot y_j^*(y_k) =$$
$$= \delta_{ie} \cdot \delta_{jk}$$

Das Resultat ist also 1 wenn $i=\ell$ und $j=k$ und Null sonst.

Das Resultat ist also $(x_i \otimes y_j)^*$. Denn genau

$\boxed{(x_i \otimes y_j)^* (x_\ell \otimes y_k)}$ hat diese Eigenschaft!