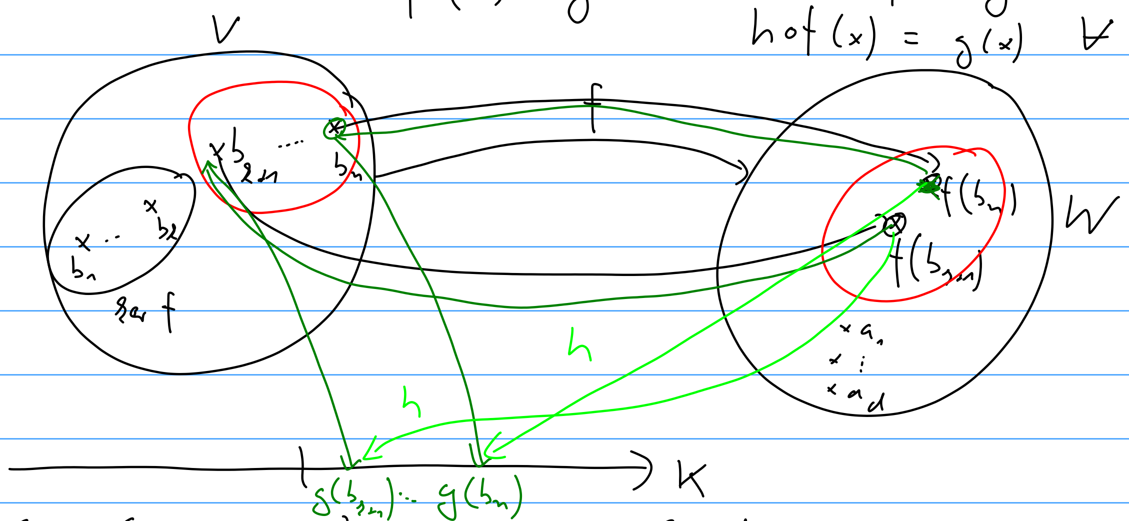
"$\subset$" $(\ker f)^\circ \subset \operatorname{Im} f^t$ $\qquad f^t : W^* \to V^*$

Sei also $g \in (\ker f)^\circ$, d.h. $g \in V^*$ mit $\boxed{g(x) = 0 \Leftarrow f(x) = 0}$

z.z.: $\exists\, h \in W^* : f^t(h) = g$ d.h. $h \circ f = g$ $\quad V \to K$!!

$h \circ f(x) = g(x) \quad \forall x \in V$ $\quad h(f)(x) = 0$



Sei $\{b_1, \dots b_l\}$ Basis von $\ker f$

$h \circ f(x)$ falls $x \in \ker f$: $f(x) = 0 \Rightarrow h \circ f(x) = 0 = g(x)$

Wir ergänzen diese Basis zu einer Basis von V:

$B = \{b_1, \dots, b_l, b_{l+1}, \dots, b_n\}$ $\qquad$ z.z. $\exists h$ mit $h \circ f(x) = g(x)$ $\forall x \in \operatorname{span}\{b_{l+1}, \dots b_n\}$

Betrachte $f(b_{l+1}), \dots, f(b_n)$. Diese sind linear unabhängig.

Grund: $0 = \sum_{j=l+1}^{n} \alpha_j f(b_j) = f\Big(\underbrace{\sum_{j=l+1}^{n} \alpha_j b_j}_{\in \ker f}\Big) \Rightarrow \sum_{j=l+1}^{n} \alpha_j b_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$

Wähle $h(f(b_j)) = g(b_j) \Rightarrow h \circ f(b_j) = g(b_j) \quad \forall j \geq l+1$

wegen Linearität gilt die letzte Gleichung auch für alle Linearkombinationen der b_j.

Erinnerung: Die Bilder von Basisvektoren können wir uns in der Tat aussuchen!

□