Multilineare Algebra

Definition: Sei K ein Körper, $V_1, V_2, \ldots V_n$, W Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbbildung

$$f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W$$

nennt man <u>multilinear</u> $:\Leftrightarrow$

$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$f(x_1, x_2, \ldots, \alpha x_j + y_j, \ldots x_n) = \alpha f(x_1, \ldots x_n) + f(x_1, \ldots y_j, \ldots x_n)$$

$\forall \alpha \in K$, $x_i \in V_i$ $\forall i \in \{1, \ldots n\}$ $y_j \in V_j$.

Begriffe: Für $n = 1$ nennt man eine solche Abbildung "linear".
Für $n = 2$ " " " " " "bilinear".
Falls $W = K$ nennt man eine multilineare Abbildung auch "Multilinearform"..(i. A. R. $V_1 = V_2 \ldots$)

Bilinearformen

Definition: (Sei K Körper), V ein K-VR. Eine Abbildung
$b: V \times V \to K$ nennt man Bilinearform.

Beispiele: a) $K = \mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ Skalarprodukt
kanonisch für $V = \mathbb{R}^n$: $\boxed{\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j}$

b) Für $n = 2$ ist die Determinante def auf den 2×2-Matr. wenn man sie als Multilinearform der Spalten versteht, eine Bilinearform $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. durch

$$\boxed{b\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ist Bilinearform}}$$
$$= ad - bc$$

c) Für eine allgemeine $n \times n$-Matrix A ist die Abbildung
$b_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$b(x, y) := x^t \cdot A \cdot y$$ ist ebenfalls eine Bilinearform

Bemerkung hierzu: in b) und c) kann man natürlich einen allg. Körper wählen.

Auch a) und b lassen sich in der Form c) schreiben: Bei a) wähle $A = E_n$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x^t \cdot y = x^t \cdot E_n y$$

Bei b): $b\left(\binom{a}{c}\binom{b}{d}\right) = ad - bc = (a\ c) \cdot A \cdot \binom{b}{d} =$

$$= (a c) \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}$$

c) definiert in der Tat Bilinearformen. Relativ klar ist dass b_A eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist.

$$x^t \cdot A \cdot (\alpha y + z) = x^t \cdot (\alpha A y + A z) = \alpha x^t A y + x^t A z. \quad (*)$$

(Siehe lin. alg 1: Durch Zeile × Spalte - Vorschrift ist Multiplikation von Matrix auf Vektor linear)

$(*) = b_A(x, \alpha y + z) = \alpha\, b_A(x,y) + \alpha\, b_A(x,z)$ lin in 2. Komp.

Wie sieht es mit 1. Komp aus?

$$b_A(\alpha x + y, z) = (\alpha x + y)^t \cdot A \cdot z = \left[(\alpha x + y)^t A z\right]^{tt} =$$

$$= \left[z^t A^t (\alpha x + y)\right]^t \underset{\text{wie oben}}{=} \left[\alpha z^t A^t x + z^t A^t y\right]^t = \alpha x^t A z + x^t A y.$$

$$= \alpha b_A(x,z) + b_A(y,z)$$

Darstellung von Bilinearformen

Erinnerung: Darst. von lin. Abb: $f: V \to W$ ist eindeutig bestimmt durch $f(b_1), f(b_2) \ldots, f(b_n)$ $B = \{b_1, \ldots b_n\}$ Basis von V.

Es macht Sinn, die $f(b_j)$ in einer Basis $\mathcal{A}$ von W darzustellen, dann wird aus $f(b_1)$ ein El. in $\mathbb{R}^m$ etc.

Auch Bilinearformen lassen sich darstellen:

Definition: Sei V ein endlich dim. K-VR, $b: V \times V \to K$ eine Bilinearform. Sei $\mathcal{A}$ eine Basis von V. Dann nennt man $M_B(b) := \begin{pmatrix} b(b_1,b_1) & b(b_1,b_2) & \ldots & b(b_1,b_n) \\ b(b_2,b_1) & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & b(b_n,b_n) \end{pmatrix}$ die Darstellung von b. $(\mathcal{A} = \{b_1, b_2 \ldots b_n\})$

Beispiele von oben: a) Skar : $M_B(\langle\cdot,\cdot\rangle) = E_n$

b) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$M_B(\text{"det"}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{"}\det(x,y)\text{"} = x^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$$