Satz: Falls $f: (G,\circ) \to (H,\oplus)$ ein Gruppenhomomorphismus und bijektiv, dann ist f^{-1} auch ein Homomorphismus.

Beweis: $f^{-1}(x \oplus y) = f^{-1}\big(f(f^{-1}(x)) \oplus f(f^{-1}(y))\big) =$
$= f^{-1}\big(f[f^{-1}(x) \circ f^{-1}(y)]\big) = f^{-1}(x) \circ f^{-1}(y)$ $\square$

Dies ist definierende Eigenschaft von Gruppenhomom.

Nebenklassen

Definition: Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe, $U \leq G$, $g \in G$ beliebig.
Dann nennt man die Menge
$g \circ U := \{g \circ u : u \in U\}$ Linksnebenklasse bzgl U. zum Element g

$U \circ g := \{u \circ g : u \in U\}$ Rechtsnebenklasse bzgl U zu g.

Notation: "$A \circ B$" für $A, B \subset G$ mit $(G,\circ)$ Gruppe bezeichnet $A \circ B := \{a \circ b : a \in A, b \in B\}$
Auf natürliche Weise erhält man so eine Verknüpfung auf der Potenzmenge von G.
Mit "$A \circ g$" mit $A \subset G$, $g \in G$ meint man $A \circ \{g\}$
Ähnlich $g \circ A := \{g\} \circ A$

Bsp: Betrachte die Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ und $U := n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Sei $g \in \mathbb{Z}$. Wie sieht $g \circ U$ aus?
Offensichtlich ist $g \circ U = U \circ g$ da die Gruppe abelsch.
(Linksnebenklasse $\hat{=}$ Rechtsnebenklasse = Nebenklasse)

$$g \circ U = \{\ldots g-2n, g-n, g, g+n, g+2n \ldots\}$$

Die Nebenklasse enthält alle Elemente, die beim Teilen durch n den selben Rest haben.
Man benennt die Nebenklasse mit Bezug auf diesen Rest.
Wir können $g \circ U$ durch verschiedene Repräsentanten $g \in g \circ U$ beschreiben. In diesem Beispiel ist $g \circ U$ Äquivalenzklasse zu "$\sim$": Selbe Rest beim Teilen durch n. Gilt das allgemein?

Satz: Alle Links- bzw. Rechtsnebenklassen sind Äquivalenzklassen zu folgenden Äquivalenzrelation:

l) $x \sim_l y \;:\iff\; x^{-1} \circ y \in U$ (ÄR für Linksnebenklasse)

r) $x \sim_r y \;:\iff\; y \circ x^{-1} \in U$ (ÄR für Rechtsnebenklasse)

Beweis: Die Relation $\sim_r$ ist in der Tat eine ÄR, siehe Satz zu den äquivalenten Definitionen des Begriffs "Untergruppe".

Ebenso lässt sich zeigen, dass $\sim_l$ eine ÄR ist.

(Betrachte den entsprechenden Beweis für $\sim_r$ im Spiegel)

l) Seien $x, y \in g \circ U$ d.h. $\exists\, u, v \in U$ mit $x = g \circ u$, $y = g \circ v$

$$x^{-1} \circ y = (u^{-1} \circ \cancel{g^{-1}}) \circ (\cancel{g} \circ v) = u^{-1} \circ v \in U \;\iff:\; x \sim_l y$$

Sei $x, y \in G$ mit $x \sim_l y$, wobei $x \in g \circ U$.

Es bleibt zu zeigen, dass $y \in g \circ U$.

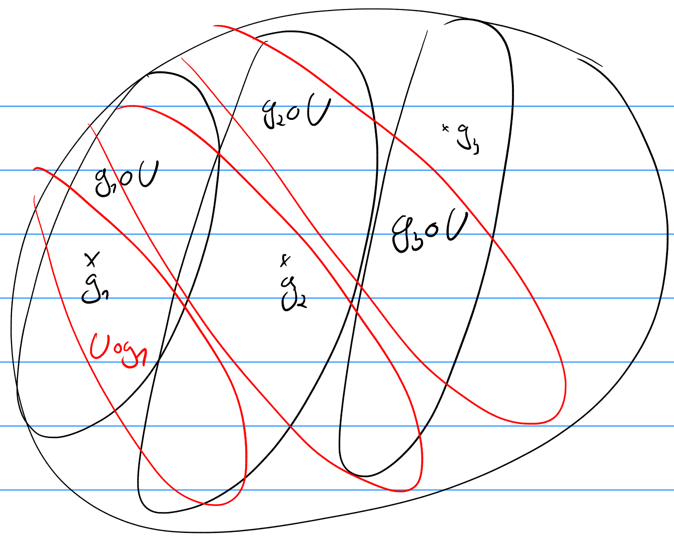
$x \sim_l y \;:\iff\; x^{-1} \circ y \in U$ $\qquad$ $x \in g \circ U$ $\qquad$ $x = g \circ u$ mit $u \in U$

$\iff u^{-1} \circ g^{-1} \circ y =: v \in U$

$\iff y = (u^{-1} \circ g^{-1})^{-1} \circ v$ (Satz zur Lösung von $a \circ x = b$)

$= g \circ \underbrace{u \circ v}_{\in U}$ ✓ $\qquad \Rightarrow y \in g \circ U$ $\square$

r) analog.



$G, \quad U$

$x \sim y :\Rightarrow x^{-1} \circ y \in U$

<u>Satz:</u> G kann als disjunkte Vereinigung aller zu $U \leq G$ gehörigen Linksnebenklassen geschrieben werden. (Rechtsnebenkl. ebenso)

<u>Beweis:</u> Für jedes $g \in G$ gilt natürlich $g = g \circ e$, d.h. $g \in g \circ U$

Die Vereinigung aller Linksnebenklassen liefert also offensichtlich ganz G.

Es bleibt zu zeigen, dass die Vereinigung disjunkt ist, d.h. dass zwei Linksnebenklassen entweder identisch oder disjunkt sind.

Letzteres ist eine Eigenschaft aller Äquivalenzklassen, d.h. nicht nur jener zu "$\sim_\ell$": $x^{-1} \circ y \in U$.

Seien $A \neq B$ Äquivalenzklassen zu $\sim$. WA: $A \cap B \ni x$

Da $A \neq B$ $\exists\, a \in A$ mit $a \notin B$ (oder $b \in B$ mit $b \notin A$)

o.B.d.A

$x \in A,\ a \in A \Rightarrow \boxed{x \sim a}$ $\quad \boxed{x \in B} \Rightarrow a \in B$ da B Ä.K. zu "$\sim$" $\lightning$

" Rechtsnebenklassen analog.

$$G := \dot{\bigcup_{g \in G}} g \circ U \quad \lightning \quad \text{falsch}$$

$$G := \dot{\bigcup_{\{\lambda :\, \lambda = g \circ U\}}} \lambda$$

Satz: Jede Links- bzw Rechtsnebenklasse hat die gleiche Zahl an Elementen wie die Untergruppe U.
(Dadurch sind diese zueinander gleich in der Anzahl der EL.)

Beweis: Sei $g \in G$. z.z. U ist isomorph zu $g \circ U$.
($U \circ g$ analog).
Wir zeigen dazu, dass $f_g : U \to g \circ U$ $\quad f_g(x) = \underbrace{g \circ x}_{\in g \circ U}$
ist bijektiv.
Diese Abbildung erreicht per Def. von $g \circ U$ alle Elemente in $g \circ U$. Ist also surjektiv.
Injektivität: Sei $f_g(u) = f_g(v) \qquad u, v \in U$
d.h. $g \circ u = g \circ v \quad | \, \circ g^{-1}$ von links
$\Rightarrow \quad u = v \qquad \square$