$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \dots V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{\psi}"'] & T \arrow[r, "\boxed{f_\psi}"] & W \end{tikzcd}$$

$\forall$ VR W, $\psi : V_1 \times V_2 .. V_n \to W$ linear
$\exists!\, f_\psi : \psi = f_\psi \circ \varphi$, f_ψ linear $\Rightarrow$ (T, φ) ist Tensorprodukt)

Satz: Jedes Element im Tensorraum ist Summe endlich vieler reiner Tensoren. (nicht eindeutig)
d.h. $\forall\, t \in V_1 \otimes V_2$ $\quad \exists\, v_1, \dots v_n \in V_1,\ w_1, w_2 \dots w_n \in V_2$
so dass $t = \sum_{j=1}^{m} v_j \otimes w_j \qquad v_j \otimes w_j := \varphi(v_j, w_j)$

Beweis: Die $b_x \otimes a_y$ bilden für $(x,y) \in J \times I$ eine Basis von $V_1 \otimes V_2$. Jeder Vektor in $V_1 \otimes V_2$ kann als endliche Linearkombination von Basiselementen geschrieben werden.
$$t = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\alpha_j e_j}_{\text{reiner Tensor}} \quad \text{mit } e_j \in \{ b_x \otimes a_y : (x,y) \in J \times I \}$$
Ziehe das α_j z.B immer zum ersten Faktor $\Rightarrow$ Bew.
$$\left(\alpha_j e_j = (\alpha_j b_x) \otimes a_y \quad \text{falls } e_j = b_x \otimes a_y \right)$$

Satz: Sei $M := \{ \psi : V_1 \times V_2 .. \times V_n \to W \text{ multilinear} \}$
sei $L := \{ f : V_1 \otimes V_2 .. \otimes V_n \to W \text{ linear} \}$
$\left(\operatorname{Hom}(V_1 \otimes V_2 .. \otimes V_n \to W) \right)$
Die Abbildung, die jedem ψ das entsprechende f_ψ zuordnet mit $\psi = f_\psi \circ \varphi$ ist ein Isomorphismus.
Beweis: Wegen der definierenden Eigenschaft des Tensorproduktes existiert für jedes ψ genau ein solches f_ψ, daher ist die Abbildung wohldefiniert.
Linearität: $f_{\alpha\psi + \chi} \overset{?}{=} \alpha f_\psi + f_\chi$

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \dots V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\alpha\psi + \chi \quad \psi \quad f \circ \varphi"'] & V_1 \otimes \dots \otimes V_n \arrow[r, "f_{f \circ \varphi}" above, "\alpha f_\psi + f_\chi", "f_\psi"'] & W
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{f_{\alpha\psi+\chi}}$ existiert in eindeutiger Weise.

$$f_{\alpha\psi+\chi} \circ \varphi = \alpha \boxed{\psi} + \chi = \alpha \boxed{f_\psi \circ \varphi} + f_\chi \circ \varphi =$$

$$= \boxed{(\alpha f_\psi + f_\chi)} \circ \varphi$$

Surjektivität: Existiert in der Tat zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2 \dots \otimes V_n \to W)$ ein ψ, so dass $f_\psi = f$?

Ja! Wähle $\psi = \boxed{f} \circ \varphi$ $\qquad$ $\psi = \boxed{f_\psi} \circ \varphi$

Injektivität: Seien ψ, χ multilineare Abbildungen von $V_1 \times V_2 \dots V_n \to W$ mit $f_\psi = f_\chi$

z.z.: $\psi = \chi$

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \dots V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{\psi}"'] & V_1 \otimes V_2 \dots V_n \arrow[r, "\boxed{f_\psi}"] & W
\end{tikzcd}
$$

$$\boxed{\psi = \boxed{f_\psi} \circ \varphi} \qquad \boxed{\chi = \boxed{f_\chi} \circ \varphi}$$

$$\Rightarrow \psi = \chi \quad \square$$

$\Rightarrow$ Die Abbildung ist ein Isomorphismus.