Wh:

Dualraum: Gegeben VR V über K.

$$V^* = \{ f : V \to K, \text{ linear} \}$$

Bsp: $V = K^n$ Menge der Spaltenvektoren der Länge n

Die Menge aller Abbildungen von $V \to K$ sind die entsprechenden Matrizen, in diesem Fall Zeilenvektoren der Länge n.

Definition: Sei ein VR V gegeben. (Körper K), V^* der zugehörige Dualraum. Dann ist auf $V^* \times V$ auf ganz natürliche Art eine Abbildung in den Körper K definiert über:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V^* \times V \to K, \quad \langle f, v \rangle := f(v)$$

Diese Abbildung nennt man Duale Paarung.

Satz: $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ist immer bilinear.

Beweis: Per Definition ist f linear $\Rightarrow$ $\underbrace{f(\alpha v + w)}_{\langle f, \alpha v + w \rangle} = \underbrace{\alpha f(v)}_{\alpha \langle f, v \rangle} + \underbrace{f(w)}_{\langle f, w \rangle}$

Linearität in der zweiten Variablen folgt direkt.

Linearität im ersten Argument:

$$(\alpha f + g)(v) = \alpha f(v) + g(v) \quad \checkmark$$

Definition: Sei V ein K-VR, $B = \{ e_i ; i \in I \}$ eine Basis von V.

Wir definieren $e_i^* \in V^*$ über: $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$

(d.h. $\langle e_i^*, e_j \rangle = 0$ falls $i \neq j$, $\langle e_i^*, e_i \rangle = 1 \ \forall i$).

Bemerkung: Über obige Vorschrift ist in der Tat eine eindeutige Abbildung von $V \to K$ für jedes i definiert:

$$e_i^*(v) = e_i^*\Big(\sum_{j \in J} \lambda_j e_j \Big)$$

J ist endl. Teilmenge von I

$v = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$

$$= \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i \quad (\text{bzw } 0 \text{ falls } i \notin J)$$

Das zeigt Eindeutigkeit von e_i^*, sowie Existenz.

Satz: a) Die e_i^*, $i \in I$ sind linear unabhängig.
b) Falls $n = \dim V < \infty$ bilden sie eine Basis des V^*, die sogenannte <u>Duale Basis</u>.

Beweis: a) Betrachte $\sum_{j \in J} \lambda_j e_j^* = 0$ für $J \subset I$ endlich.
$\uparrow$ Nullabbildung.

d.h. $\sum_{j \in J} \lambda_j e_j^*(v) = 0 \quad \forall v \in V$.

Wähle $v = e_k$ für beliebiges $k \in J$.

$$0 = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j^*(e_k) = \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{jk} = \lambda_k \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \forall k \in J$$

$\Rightarrow$ lin. unabh.

b) Sei $v^* \in V^*$. Falls $v^*(e_i) = \lambda_i$ gegeben, so ist v^* eindeutig (s. o.)

$$\left[v^*(v) = \sum_{j=1}^n v^*\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\right) = \sum_{j,k=1}^n \lambda_j \alpha_k \right]$$

$$\boxed{v^* := \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j^*} \qquad \Rightarrow v^*(e_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j^*(e_i) = \lambda_i .$$

Jedes beliebige $v^* \in V^*$ lässt sich also als Linearkombination der e_i^* schreiben, letztere sind nach a) linear unabhängig.
$\Rightarrow \{e_1^*, e_2^*, \dots e_n^*\}$ ist eine Basis von V^*.

Bemerkung: Für unendlich dimensionale Vektorräume ist $\{e_i^* : i \in I\}$ im Allgemeinen keine Basis von V^*!

Bsp: $V = K^n$. Die Basis ist durch die kanonische Einheitsbasis festgelegt: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Stelle $\qquad e_i^* = e_i^t = (0 \dots, \boxed{1}, \dots 0)$.

$$e_i^*(e_j) = e_i^* \cdot e_j = \delta_{ij} .$$

Man kann natürlich auch andere Basen im K^n wählen.
Dann gilt aber <u>nicht</u> mehr, dass $\{e_i^*\} = \{e_i^t\}$.

z.B. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_1^t = (1, 1) \qquad e_1^t e_1 = 2 \neq 1$ ↯

$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad\qquad e_1^t e_2 = 1 \neq 0$

Bemerkung: Ein Vektor $v \in V$ lässt sich nur bei vorher festgelegter Basis von V direkt mit einem Vektor aus V^* identifizieren.
$K^n \ni v \to v^t \in (K^n)^*$ funktioniert natürlich nur, da man im K^n entsprechend bereits eine Basis gewählt hat.

$$v = \sum \alpha_i e_i \longrightarrow v^* = \sum \alpha_i e_i^*$$

klar bei geg. Basis.

Parsevalidentität: a) $v = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(v)\, e_j = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j^*, v \rangle e_j$, $v \in V$, $\dim V = n < \infty$

b) $v^* = \sum_{j=1}^{n} v^*(e_j)\, e_j^* = \sum_{j=1}^{n} \langle v, e_j \rangle e_j^*$ $\quad v^* \in V^*$

Bemerkung: Durch den beschriebenen natürlichen Identifikation von V mit V^* bei gegebener Basis, $\dim V < \infty$.

$$\left(v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \longleftrightarrow v^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^* \right)$$

Definiert die duale Paarung in natürlicher Weise eine Bilinearform: $v^t := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*$ falls $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$

$b: V \times V \to K$; $b(v,w) = \langle v^t, w \rangle$.

Dies ist exakt das Standardskalarprodukt auf V

$$b(e_i, e_j) = \langle e_i^t, e_j \rangle = e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

Korollar: $\dim V = \dim V^*$

Abbildungen und Dualraum

Betrachte zunächst Abbildungen von $K^n \to K^m$, die linear sind. Diese sind gegeben durch eine $n \times m$ - Matrix.

$$(K^n)^* = (K^n)^t \qquad (K^m)^* = (K^m)^t$$

Ins "duale" gelangt man, in dem man die Rolle von Zeilen und Spalten vertauscht. Entsprechend erhält man eine $m \times n$ - Matrix, die von $(K^m)^*$ in den $(K^n)^*$ abbildet. (ebenfalls durch Transponieren):

$$Av = w \qquad v \in \mathbb{R}^n, \quad w \in \mathbb{R}^m$$

A hat m Zeilen, n Spalten

$$\underbrace{w^t}\, A^t = v^t$$

Man erhält, wie gesagt, ganz natürlich eine Abbildung von $(K^m)^* \to (K^n)^*$.

<u>Definition und Satz</u>: Seien V, W K-Vektorräume, $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
Dann definiert man die sogenannte <u>transponierte Abbildung</u> $f^t \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ über:

$$f^t(g) = g \circ f$$

<u>Beweis</u>: $f: V \to W$, $g \in W^*: W \to K \Rightarrow g \circ f: V \to K$

$\uparrow$ linear und $\uparrow$ linear $\Rightarrow$ $\uparrow$ linear

d.h. $f^t: W^* \to V^*$. Dies zeigt noch nicht, dass f^t Homom.

dazu: $f^t(\alpha g + h) = (\alpha g + h) \circ f = \alpha\, g \circ f + h \circ f =$
$= \alpha f^t(g) + f^t(h)$ ✓

$\Rightarrow f^t$ ist ein Homomorphismus.

<u>Bemerkung</u>: transponierte Abbildungen wurden bisher noch nicht definiert, nur transponierte Matrizen!

<u>Satz</u>: a) $(f \circ g)^t = g^t \circ f^t$ $\qquad g: V \to W \qquad f: W \to X$
$(f \circ g)^t: X^* \to V^* \qquad f^t: X^* \to W^* \qquad g^t: W^* \to V^*$

b) $(id_V)^t = id_{V^*}$

c) Falls f Isomorphismus, so ist auch f^t Isomorphismus

<u>Beweis</u>: a) $(f \circ g)^t(h) = h \circ (f \circ g)$

$g^t \circ f^t(h) = g^t \circ (h \circ f) = g^t((h \circ f)) =$
$= (h \circ f) \circ g$ ✓