<u>Beispiel:</u> Wir behalten alle Gruppenaxiome für dieses Bsp. bis auf die "Seite" von der die Inversen wirken. D.h. A-Gesetz gilt und:

$\to$ $\exists e: \quad x \circ e = x \quad \forall x \in M$

$\forall x \in M \ \exists x^{-1} \in M: \quad x^{-1} \circ x = e$

$(\circ : M \times M \to M)$ und betrachten eine Bsp, welches diese Axiome erfüllt, aber keine Gruppe ist:

$M = \{0, 1\}$

$a \backslash b$	0	1
$\to$ 0	0	0
$\to$ 1	1	1

$\swarrow$ $a \circ b$

In der Tat ist 0 ein rechtsneutrales Element:

$\underset{x}{0} \circ 0 = \underset{x}{0} \qquad \underset{x}{1} \circ 0 = \underset{x}{1}$ ✓

$0^{-1} = 0$ da $0^{-1} \circ 0 = 0$

$1^{-1} = 0$ da $1^{-1} \circ 1 = 0 \circ 1 \neq 0$ ✓

Das neutrale Element dieses Bsp (Was ja keine Gruppe ist) is nicht eindeutig!

$\underset{x}{0} \circ \underset{e}{1} = \underset{x}{0} \qquad \underset{x}{1} \circ \underset{e}{1} = \underset{x}{1}$

Beide Elemente sind <u>keine</u> neutralen von links:

$\underset{e}{0} \circ \underset{x}{1} = \underset{\cancel{x}}{0} \qquad \circ\circ\circ$

<u>Satz:</u> a) $(x^{-1})^{-1} = x \quad \forall x \in G$ (falls G Gruppe)

$(xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1} \quad \forall x, y \in G$

(Vorsicht Reihenfolge)

b) Kürzungsformel: Falls $ax = bx \Rightarrow a = b$

$xa = xb \Rightarrow a = b$

c) Die Gleichung

$ax = b$ hat $\forall a, b \in G$ die eindeutige Lösung

$x = a^{-1} b$. $\quad (xa = b \to x = ba^{-1})$

(Vorsicht Reihenfolge)

Beweis: a) $(x^{-1})^{-1} \overset{A}{=} (x^{-1})^{-1} \circ e \overset{S}{=} (x^{-1})^{-1} \circ (x^{-1} \circ x) =$

$$= [\underbrace{(x^{-1})^{-1} \circ x^{-1}}_{e}] \circ x \underset{S}{=} e \circ x \underset{S}{=} x$$

Betrachte: $(xy)^{-1} \circ (x \circ y) = e$

$$(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) = y^{-1} \circ \cancel{e} \circ y = e$$

Wegen Eindeutigkeit des Inversen ist also

$$(xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$$

b) Sei $a x = b x$

$$a = a e = a (x x^{-1}) = b x x^{-1} = b \quad \text{(2. Formel analog)}$$

c) Betrachte für $a, b \in G$ die Gleichung $a x = b$

$a^{-1} b$ ist Lösung, da: $a(a^{-1} b) = b$.

Eindeutigkeit: Sei c Lösung, also $a \cdot c = b$

z.z: $c = a^{-1} b$

$$c = e \circ c = a^{-1} \circ a \circ c = a^{-1} b \quad ✓$$

Kommutativität

Def: Sei G Gruppe, $a, b \in G$ dann sagt man, a und b **kommutieren** $:\Leftrightarrow$ $a \circ b = b \circ a$

Bem: In den Sätzen oben wurde gezeigt, dass jedes Element einer Gruppe mit dem neutralen sowie seinem Inversen kommutiert:

$$x \circ e = e \circ x \quad (= x)$$
$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x \quad (= e)$$

Definition: Man nennt eine Gruppe G kommutativ, falls a und b für alle $a, b \in G$ kommutieren.

Beispiel: Die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen ($n \in \mathbb{N}$ bel.) ist mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe, aber nicht kommutativ!

z.B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Statt "kommutative Gruppe" sagt man auch "abel'sche Gruppe".

Weitere Strukturen

Wir haben oben die Gruppenaxiome mal im Bsp. abgeändert. Hierzu gibt es, je nach gültigen Axiomen, weitere Begriffe:

Definition: $(H,\circ)$ heißt Halbgruppe, falls das Ass.-Gesetz gilt d.h. $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$. (*)

$(M,\circ)$ heißt Monoid falls das Ass.-Gesetz (*) gilt und ein neutrales Element existiert:

$$\exists e: \quad e\circ x = x\circ e = x \quad \forall x\in M$$

Potenzieren

Definition: Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe, $n\in\mathbb{N}$. Dann definiert man für jedes Element $x\in G$ die n-te Potenz von x iterativ über:

$$x^0 = e \quad (e \text{ ist neutrales Element})$$
$$x^{n+1} = x^n \circ x$$

Ebenso definiert man negative Potenzen $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\cancel{\{0\}}$:

$(x^{-1}$ ist Inverses von $x)$

$$x^{-(n+1)} = x^{-n}\circ x^{-1}$$

Satz: (Potenzgesetze):
$$x^n\circ x^m = x^{n+m}$$
$$(x^n)^m = x^{n\cdot m}$$

(Beweis folgt gleich)

Bsp: $(\mathbb{N},+)$: Dann ist x^m das selbe wie $x\cdot m$

Potenz nach obiger Def — "normale" Multipl.

Def sinnvoll als $\cdot$ zu verstehen?

$$x^0 \stackrel{?}{=} x\cdot 0 = e = 0 \quad ✓$$

$$x^{n+1} \stackrel{?}{=} x\cdot(n+1) \qquad x^{(n+1)} = x^n + x$$

$$x\cdot(n+1) = x\cdot n + x \quad ✓$$

Zur Formel: $\quad x^n \circ x^m = x^{n+m}$

$$x \cdot n + x \cdot m = x \cdot (n+m)$$ ✓ D-Gesetz

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$(x \cdot n) \cdot m = x \cdot (n \cdot m)$$ ✓ A-Gesetz