

$$b) \quad V^* \times W \xrightarrow{f} V^* \otimes W \xrightarrow{f_\psi} \text{Hom}(V, W)$$

$$\psi: \psi(f, \gamma) := \gamma \cdot f$$

$$\psi(f, \gamma)(x) = \gamma \cdot f(x)$$

Defin. Eig. des Tensorproduktes liefert:

$$\exists! f_\psi: V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W) \quad \text{mit}$$

$$f_\psi \circ f = \psi$$

$$f_\psi(\underbrace{f \otimes \gamma}_{\psi(f, \gamma)}) = \psi(f, \gamma) = \gamma \cdot f \quad \checkmark$$

Äußeres Produkt

Im vorigen Kapitel haben wir multilineare Abbildungen $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ betrachtet und gesehen, dass wir diese durch lineare Abbildungen auf $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ beschreiben können.

In diesem Kapitel werden wir uns auf einen bestimmten Typ, nämlich die alternierenden multilin. Abb. einschränken.

Definition: Eine multilineare Abbildung $f: V \times V \times \dots \times V \rightarrow W$

heißt alternierend $:\Leftrightarrow$

$$\left(f(x_1, \dots, \underset{\uparrow}{y}, \dots, \underset{\uparrow}{y}, \dots, x_n) = 0 \right)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{falls } \exists i \neq j \text{ mit } x_i = x_j.$$

Hier sind V, W Vektorräume.

Beispiel: a) die Determinante ist alternierend.

$$b) \quad \exists \text{m } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3: \quad x \times y \quad (\text{Kreuzprodukt})$$

$$k: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad k(x,y) := x \times y$$

$$\exists \text{m } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3: \quad \langle x \times y, z \rangle$$

$$s: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad s(x,y,z) = \langle x \times y, z \rangle$$

Bemerkung: Falls eine multilineare Abbildung alternierend ist, so gilt $f(\dots x_i \dots x_j \dots) = -f(\dots x_j \dots x_i \dots)$ und umgekehrt.

$$\Rightarrow " 0 = f(x+y, x+y) = \cancel{f(x,x)} + f(x,y) + f(y,x) + \cancel{f(y,y)}$$

$$\Rightarrow f(x,y) + f(y,x) = 0 \quad \Rightarrow f(x,y) = -f(y,x)$$

$$\Leftarrow \text{ setze } x_i = x_j \Rightarrow f(\dots x_i \dots x_i \dots) = -f(\dots x_i \dots x_i \dots)$$

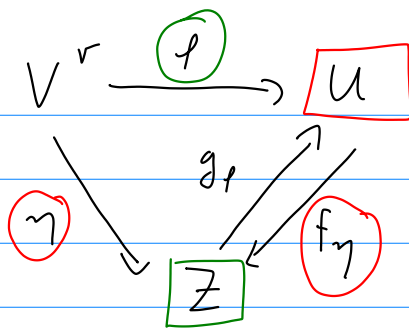
$$\Rightarrow f(\dots x_i \dots x_i \dots) = 0$$

Definition: Sei V ein Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$. Ein Vektorraum U zusammen mit einer alternierenden ^{multilin.} Abbildung $f: V^r \rightarrow U$ heißt äußeres Produkt genau dann wenn gilt:
Für jede Vektorraum W und jede alternierende multilineare Abbildung $\varphi: V^r \rightarrow W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\varphi: U \rightarrow W$ mit $f_\varphi \circ f = \varphi$

$$\begin{array}{ccc} V^r & \xrightarrow{f} & U & \xrightarrow{f_\varphi} & W \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & \varphi & \end{array}$$

Satz: (Eindeutigkeit): Sei V ein K -Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$ und (U, f) sowie (Z, η) zwei r -fache äußere Produkte von V .
Dann sind U und Z isomorph mit $f_\eta \circ f = \eta$

Beweis: Nehmen identisch um entspr. Satz über Tensorprodukte.



Da (U, f) ä. P.:

$$f_\gamma \circ f = \gamma$$

Da (Z, γ) ä. P.:

$$g_r \circ \gamma = f$$

$$\Rightarrow \text{Ein } f_\gamma \circ g_r = \text{id}_U \quad \text{ebenso } g_r \circ f_\gamma = \text{id}_Z$$

r-fach

Notation: Das äußere Produkt von V bezeichnet man als

$$\bigwedge^r V = V \wedge V \wedge \dots \wedge V$$

$$f(x_1, \dots, x_r) = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r$$

Existenz des Ä. P.

Die Existenz des äußeren Produktes zeigen wir konstruktiv mit Hilfe des Tensorproduktes. Wir werden zeigen, dass die

Menge: $\underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-fach}} := T^r(V)$

$T^r(V)/V_r$ mit der natürlichen Einbettung $f: x \rightarrow \bar{x}$ die Definition des äußeren Produktes erfüllt.

$$V_r := \text{span} (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_r \mid \exists i \neq j \text{ mit } x_i = x_j) \subset T^r(V)$$