b)
$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & V^* \otimes W \arrow[r, "f_\psi"] & \mathrm{Hom}(V,W) \end{tikzcd}$$

$$\psi: \psi(f,y) := y \cdot f$$

$$\psi(f,y)(x) = y \cdot f(x)$$

Defin. Eig. des Tensorproduktes liefert:

$\exists!\, f_\psi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V,W)$ mit

$$f_\psi \circ \varphi = \psi$$

$$f_\psi(\underbrace{f \otimes y}_{\varphi(f,y)}) = \psi(f,y) = y \cdot f \quad ✓$$

Äußeres Produkt

Im vorigen Kapitel haben wir multilineare Abbildungen $V_1 \times V_2 \ldots \times V_n$ betrachtet und gesehen, dass wir diese durch lineare Abbildungen auf $V_1 \otimes V_2 \ldots \otimes V_n$ beschreiben können.

In diesem Kapitel werden wir uns auf einen bestimmten Typ, nämlich die alternierenden multilin. Abb. einschränken.

Definition: Eine multilineare Abbildung $f: V \times V \times V \ldots \times V \to W$ heißt **alternierend** $:\Longleftrightarrow$

$$\left(f(x_1, \ldots, y, \ldots y \ldots x_n) = 0 \right)$$

$$f(x_1, \ldots x_n) = 0 \quad \text{falls } \exists\, i \neq j \text{ mit } x_i = x_j.$$

Hier sind V, W Vektorräume.

Beispiel: a) die Determinante ist **alternierend**.

b) Im $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$: $\quad x \times y$ (Kreuzprodukt)

$$k: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad k(x,y) := x \times y$$

Im $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$: $\quad \langle x \times y, z \rangle$

$$s: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad s(x,y,z) = \langle x \times y, z \rangle$$

<u>Bemerkung</u>: Falls eine multilineare Abbildung alternierend ist, so gilt $f(\dots x_i \dots x_j \dots) = -f(\dots x_j \dots x_i \dots)$ und umgekehrt.

"$\Rightarrow$" $\quad 0 = f(x+y, x+y) = \cancel{f(x,x)} + f(x,y) + f(y,x) + \cancel{f(y,y)}$

$$\Rightarrow f(x,y) + f(y,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = -f(y,x)$$

"$\Leftarrow$" $\quad$ setze $x_i = x_j \quad \Rightarrow \quad f(\dots x_i \dots x_i \dots) = -f(\dots x_i \dots x_i \dots)$

$$\Rightarrow \quad f(\dots x_i \dots x_i \dots) = 0.$$

<u>Definition</u>: Sei V ein Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$. Ein Vektorraum U zusammen mit einer alternierenden multilinearen Abbildung $\varphi: V^r \to U$ heißt äußeres Produkt genau dann wenn gilt:
Für jeden Vektorraum W und jede alternierende multilineare Abbildung $\psi: V^r \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\psi: U \to W$ mit
$$f_\psi \circ \varphi = \psi$$

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & U \arrow[r, "f_\psi"] & W \end{tikzcd}$$

<u>Satz</u>: (Eindeutigkeit): Sei V ein K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$ und (U, φ) sowie (Z, η) zwei r-fache äußere Produkte von V.
Dann sind U und Z isomorph mit $f_\eta \circ \varphi = \eta$

<u>Beweis</u>: Nahezu identisch zum entspr. Satz über Tensorprodukte.

$$
\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\eta"'] & \boxed{U} \arrow[d, shift left, "f_\eta"] \\
& \boxed{Z} \arrow[u, shift left, "g_\varphi"]
\end{tikzcd}
$$

Da (U,φ) ä.P.: $f_\eta \circ \varphi = \eta$

Da (Z,η) ä.P.: $g_\varphi \circ \eta = \varphi$

$$f_\eta \circ g_\varphi \circ \eta = \eta$$

$\underset{\text{Eind.}}{\Rightarrow}$ $f_\eta \circ g_\varphi = id_U$ ebenso $g_\varphi \circ f_\eta = id_Z$

Notation: Das r-fache äußere Produkt von V bezeichnet man als

$$\Lambda^r V = V \wedge V \wedge V \dots \wedge V$$

$$\varphi(x_1, \dots x_r) = x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_r \,.$$

Existenz des Ä.P.

Die Existenz des äußeren Produktes zeigen wir konstruktiv mit Hilfe des Tensorproduktes. Wir werden zeigen, dass die Menge: $\underbrace{V \otimes V \dots \otimes V}_{r\text{-fach}} := T^r(V)$

$T^r(V)/V_r$ mit der natürlichen Einbettung $\varphi: x \to \bar{x}$ die Definition des äußeren Produktes erfüllt.

$$V_r := \operatorname{span}\left(x_1 \otimes x_2 \dots \otimes x_r \mid \exists\, i \neq j \text{ mit } x_i = x_j\right) \subset T^r(V)$$