$T^r(V) / V_r$ $\quad V_r = \text{span}(x_1 \otimes \dots \otimes x_r \mid x_i = x_j \text{ für } i \neq j)$

Hilfssatz: Sei V ein K-Vektorraum, U ein Untervektorraum von V.
$\varphi: V \to V/U : x \to \bar{x}$.
die zugehörige Abbildung auf die Restklassen.
Dann gilt: a) V/U ist ein VR.
b) φ ist eine lineare Abbildung
c) Für jede lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $\ker f \supset U$ gibt es genau eine lineare Abbildung $g: V/U \to W$ mit
$$f = g \circ \varphi.$$

<u>Beweis</u> a) Zunächst ist U auch eine Untergruppe von V, da in VR die Addition kommutativ ist ist $U \trianglelefteq V$.
$\Rightarrow$ V/U ist kommutative Gruppe zus. mit der Abbildung $\bar{x} + \bar{y} := \overline{x+y}$.

Definiere die äußere Verknüpfung $K \times V/U \to V/U$ über $\lambda \cdot \bar{x} := \overline{\lambda x}$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, betrachte dazu x und y mit $\bar{x} = \bar{y}$ $\Rightarrow$ $x = y + v$ $\quad v \in U$
$\Rightarrow$ $\lambda x = \lambda y + \underbrace{\lambda v}_{\in U}$ $\Rightarrow$ $\overline{\lambda x} = \overline{\lambda y}$

Die entsprechenden Gesetze folgen, z.B.:
$$\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda(\overline{x+y}) = \overline{\lambda(x+y)} = \overline{\lambda x + \lambda y} = \overline{\lambda x} + \overline{\lambda y} =$$
$$= \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y}$$

b) φ ist per Def. linear: $\varphi(\lambda x) = \overline{\lambda x} = \lambda \bar{x}$ ✓
(Addition siehe „alg. Strukt")

c) Sei $f: V \to W$ linear mit $U \subset \ker f$. z.z: $\exists!\, g: V/U \to W$ linear mit $f = g \circ \varphi$.

Existenz konstruktiv: $g(\bar{x}) := f(x)$

Diese Abbildung ist wohldefiniert:

Seien $x, y \in V$ mit $\bar{x} = \bar{y}$ d.h. $x = y + v$ mit $v \in U$

$$\Rightarrow \quad g(\bar{x}) = f(x) \qquad g(\bar{y}) = f(y)$$
$$= f(y) + \underbrace{f(v)}_{=0} = f(y) \quad \checkmark$$

$$f(x) \overset{!}{=} g \circ \varphi(x) = g(\bar{x}) \quad \checkmark$$

Eindeutigkeit: Sei $h: V/U \to W$ mit $\boxed{h \circ \varphi = f}$

z.z. $h \equiv g$

$$h(\bar{x}) = h \circ \varphi(x) = f(x) = g(\bar{x}) \qquad \forall x \in V$$

Satz: (Existenz des äußeren Produktes):

$T^r(V)/V_r$ zusammen mit $\eta \circ$ ⊛ wobei

$\varphi: V^r \to T^r(V)$ die eindeutige Abbildung ist mit der das Paar $(T^r(V), \varphi)$ ein Tensorprodukt wird und $\eta: T^r(V) \to T^r(V)/V_r$ $\eta: x \to \bar{x}$ auf die entsprechenden Restklassen abbildet.

⊛ ist ein äußeres Produkt.

$$
\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\eta\circ\varphi"] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & T^r(V) \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "g_\psi"] & T^r(V)/V_r \arrow[d, "f_\psi"] \\
& & W
\end{tikzcd}
$$

Beh. Für alle multilinearen, alternierenden Abbildungen $\psi: V^r \to W$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $f_\psi: T^r(V)/V_r \to W$

so dass: $\psi = f_\psi \circ (\eta \circ \varphi)$

Zunächst gibt es eine eindeutige Abbildung g_ψ mit $\psi = g_\psi \circ \varphi$. Dies ist die Definition des Tensorproduktes $(T^r(V))$.

g_ψ ist alternierend $g_\psi(x) = 0$ falls $x \in V_r$:

Sei dazu $x \in V_r$ d.h. $x \in \operatorname{span}(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_r \mid \exists\, i \neq j \text{ mit } x_i = x_j)$

Wegen der Linearität von g reicht es, $g_\psi(x) = 0$ für ein beliebiges Element der Form $x_1 \otimes x_2 \dots \otimes x_r \mid \exists\, i \neq j$ mit $x_i = x_j$

$$g_\psi(x_1 \otimes \dots x_r) = f(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$$

Wir wenden nun den Hilfssatz auf den rot eingekringelten Bereich an und erhalten, dass es genau eine Abbildung f_ψ gibt mit $g_\psi = f_\psi \circ \eta$

$$\Rightarrow \psi = f_\psi \circ \eta \circ \varphi = f_\psi \circ (\eta \circ \varphi) \quad . \quad \square$$