Wh: $b: V \times V \to K$, Bilinearität.

Darstellung: $\begin{pmatrix} b(x_1,x_1) & b(x_1,x_2) & \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

Bsp: det $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Die darstellende Matrix einer Bilinearform nennt man auch Gram'sche Matrix.

Satz: Die Abbildung, die jeder Bilinearform auf einem endlich dimensionalen Vektorraum V ihre Gram'sche Matrix zu einer gegebenen Basis B zuordnet, ist linear. D.h. Sei V endlich dim VR über K, B Basis von V. Dann ist

$$M_B : \{b: V \times V \to K\} \to M(n \times n) \quad \text{ist linear.}$$

Hier $n = \dim V$.

Beweis: Seien $a, b: V \times V \to K$ bilinearformen.
Wir müssen zeigen, dass die Gram'sche Matrix von $\alpha a + b$ zur Basis B entsprechend die Linearkombination $\boxed{\alpha M_B(a) + M_B(b)}$ ist.
($M_B(a)$ ist die Gram'sche Matrix von a zur Basis B)
Wir zeigen dies komponentenweise

$$\big(M_B(\alpha a + b)\big)_{ij} \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha a + b)(e_i, e_j) \qquad e_j \text{ ist hier der } j\text{. Basisvektor.}$$

$$= \alpha\, a(e_i, e_j) + b(e_i, e_j) = \alpha \big(M_B(a)\big)_{ij} + \big(M_B(b)\big)_{ij}$$

Die Gleichheit gilt also für jeden Eintrag, also für die ganze Matrix.

Satz: M_B ist Isomorphismus.

<u>Beweis</u>: Die Linearität haben wir eben gezeigt.
Es bleibt zu zeigen, dass M_B bijektiv ist.
Sei also A eine $n \times n$-Matrix.
Definiere b_A durch folgende Vorschrift

$$b_A(v,w) := \boxed{\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \beta_k \cdot a_{ik}} = (v_B)^t \cdot A\, w_B$$

dabei ist $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ $\quad w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$

$$M_B(b_A) = A \quad \text{denn} \quad \left(M_B(b_A)\right)_{ij} = b_A(b_i, b_j) = a_{ik}$$

alle anderen Summanden sind 0.

Wir müssen noch die Eindeutigkeit zeigen, d.h.

$$M_B(b) = M_B(a) \Rightarrow b = a$$

Betrachte $M_B(b) - M_B(a) = 0$ nach Vorr.

$$M_B(b-a) = 0 \Rightarrow \boxed{(b-a)(b_i, b_j) = 0 \ \forall i,j}$$

$$(b-a)(v,w) = (b-a)\Big(\underbrace{\sum \alpha_i b_i}_{v}, \underbrace{\sum \beta_j b_j}_{w}\Big) = \sum\sum \alpha_i \beta_j \underbrace{\boxed{(b-a)(b_i,b_j)}}_{=0}$$

$$= 0 \Rightarrow b = a$$

Kurz: $b(v,w) = b\Big(\underbrace{\sum \alpha_i b_i, \sum \beta_j b_j}_{\text{eindeutig}}\Big) = \sum\sum \alpha_i \beta_j \, b(b_i, b_j)$

<u>Bsp</u>: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Gram'sche Matrix von genau der Abb. "det".

<u>Bem</u>: Sei $V = \mathbb{R}^n$. Hier benutzt man die kanon. Einheitsbasis.
Die Bilinearformen entsprechen genau den Matrizen

$$x^t A y = b_A(x,y)$$

Wie sieht es mit Basiswechsel aus?

$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id)$ war der Basiswechsel in lin alg 1,

Wh:
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f) = \underbrace{M^{e}_{\mathcal{A}}(id)\,\underbrace{M^{\mathcal{D}}_{e}(f)\,\underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(id)\quad v_{\mathcal{B}}}_{v_{\mathcal{D}}}}_{(f(v))_e}}_{(f(v))_{\mathcal{A}}}$$

Satz: Sei $b: V \times V \to K$ Bilinearform, V endlich dim.
Dann gilt: $M_{\mathcal{A}}(b) = \left(M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id)\right)^t M_{\mathcal{B}}(b)\, M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id)$

<u>Beweis:</u> $b(v,w) = (v)^t_{\mathcal{B}} \boxed{B} (w)_{\mathcal{B}}$ mit B Gram'sche Matrix zur Basis

$$= (v)^t_{\mathcal{A}}\, A\, w_{\mathcal{A}} = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id)\, v_{\mathcal{B}}\right)^t \cdot A \cdot \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id)\, w_{\mathcal{B}}\right) =$$

$v_{\mathcal{A}} = M^{\mathcal{B}}_{A}(id)\, v_{\mathcal{B}}$ mit "w"

$$= v_{\mathcal{B}}^t \cdot \left[M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id)^t\, A\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id)\right] w_{\mathcal{B}}$$

$$B = M_{\mathcal{B}}(b) = \left(M^{\mathcal{B}}_{A}(id)\right)^t \cdot M_{\mathcal{A}}(b) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id) \qquad \square$$

Weitere Eigenschaften von Bilinearformen

<u>Definition:</u> Eine Bilinearform $b: V \times V \to K$ heißt

a) "symmetrisch" $:\Leftrightarrow$ $b(v,w) = b(w,v)$

b) antisymmetrisch oder schiefsymmetrisch $:\Leftrightarrow$ $b(v,w) = -b(v,w)$

c) positiv definit $:\Leftrightarrow$ $b(v,v) > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$

d) positiv semidefinit $:\Leftrightarrow$ $b(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in V$

e), f) "negativ" entsprechend,

g) indefinit $:\Leftrightarrow$ $\exists\, v, w$ mit $b(v,v) > 0 \quad b(w,w) < 0$

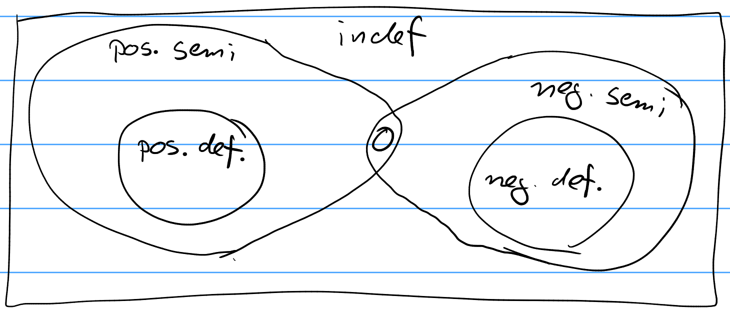
Satz: Für jede Bilinearform $b: V \times V \to K$ gilt:
$$b(v,0) = 0 = b(0,v) \quad \forall\, v \in V.$$

Beweis: $b(v,0) = b(v, \alpha 0) = \alpha (b(v,0)) \quad \forall\, \alpha \in K$

$\Rightarrow b(v,0) = 0$ (wähle $\alpha = 0$).

$b(0,v)$ analog

Satz: Eine Bilinearform ist entweder positiv semidefinit oder negativ semidefinit oder indefinit.



Ausnahme: $b=0$ ist sowohl pos. semi als auch neg. semi.

Beweis: Sei $b \neq 0$. 1. Fall: $b(v,v) \geq 0 \quad \forall\, v$

2. Fall $b(v,v) \leq 0 \quad \forall\, v$

3. Fall: Weder "1" noch "2", d.h. sowohl 1 als auch 2 verletzt $\Rightarrow$ 1. $\exists\, v$ mit $b(v,v) < 0$

2. $\exists\, w$ mit $b(w,w) > 0$

$\Rightarrow$ indefinit.

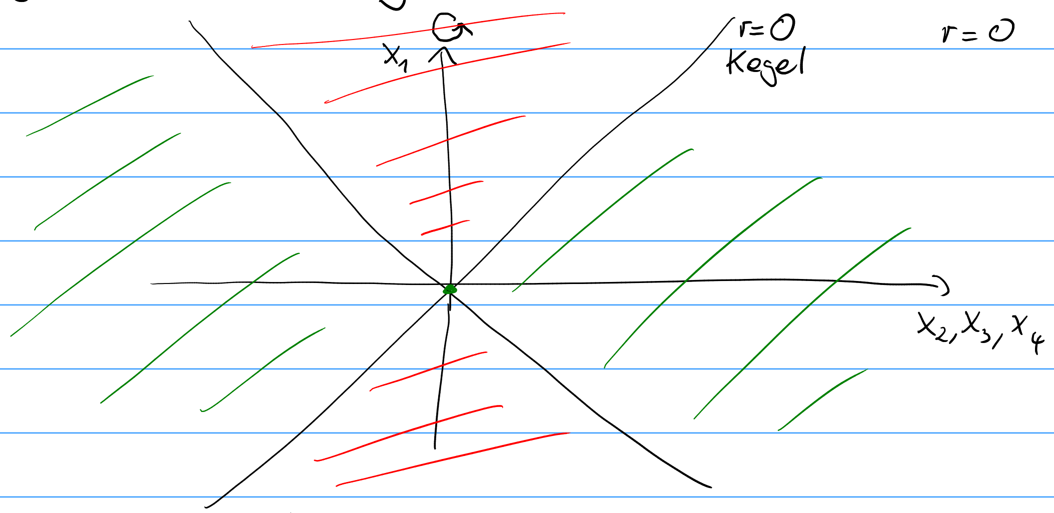
Erinnerung: Sei V ein VR über $\mathbb{R}$. Das Skalarprodukt ist als positiv definite, symmetrische Bilinearform definiert.

Bsp: $\mathbb{R}^4$ betrachte die Bilinearform gegeben durch
$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } A = M_K(b) \quad K = \text{kanon. Einheitsbasis}$$

Diese Bilinearform ist symmetrisch aber indefinit.
$$b\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = -1 \qquad b\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 1$$

Betrachte die "Einheitskreise", d.h. die Mengen

$K_r = \{ v : b(v,v) = r^2 \}$ für beliebiges r:



Für Graphik setze $x_3 = x_4 = 0$

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -x_1^2 + x_2^2 \begin{cases} < 0 & \text{falls } |x_1| > |x_2| \\ > 0 & \text{"} \quad |x_1| < |x_2| \\ = 0 & \text{"} \quad |x_1| = |x_2| \end{cases}$$