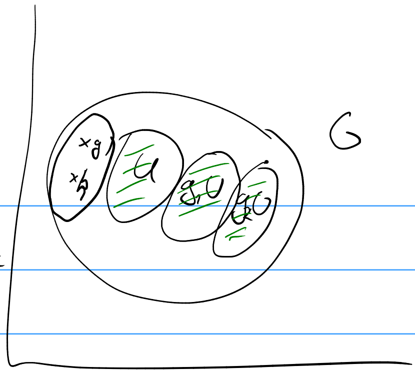


Definition: Betrachte

$G/U := \{\underbrace{gU}_{\text{Mengen}} : g \in G\}$. Dies ist die

Menge der Linksnebenklassen von G bzgl U.

Die Zahl $|G/U|$ nennt man index von G bzgl U.

Korollar: a) $|G| = |U| \cdot |G/U|$

b) Für jedes $U \leq G$ ist $|U|$ Teiler von $|G|$

c) Für jedes $g \in G$ ist $|\langle g \rangle|$ Teiler von $|G|$

($|\langle g \rangle|$ nennt man Ordnung von g).

Beweis a) Die Zahl der Elemente in allen Nebenklassen ist identisch,

Da die Linksnebenklassen (bzw Rechtsnebenklassen) die verschiedenen Äquivalenzklassen einer ÄR sind ($a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in U$ bzw $b^{-1}a \in U$)

Ist G eine disjunkte Vereinigung der Linksnebenklassen (Rechtsn.)

$$\Rightarrow |G| = \sum_{gU \in G/U} |gU| = |U| \cdot |G/U|$$

disjunkte Ver.   #

b) folgt direkt, c) Bsp für b)

Bsp: Betrachte die Permutationen einer 3-Elementigen Menge.

$S_3 = \{(1,2,3); (1,3,2); (2,1,3); (2,3,1); (3,1,2); (3,2,1)\}$ O = 2   O = 3

Dies ist eine nicht-kommutative Gruppe.

Frage: Wie sehen mögliche Untergruppen aus?

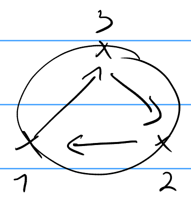
Benutze Korollar: $|U|$ ist Teiler von $|S_3| = 6$

1.) $|U| = 1$ $U = \{(1,2,3)\}$

2) $|U| = 6$ $U = S_3$

3) $|U| = 2$ $\{(1,2,3); (1,3,2)\}$, $\{(1,2,3); (3,2,1)\}$; $\{(1,2,3); (2,1,3)\}$

alle Elemente Ordnung 2



$(2,1,3)^2 \neq id$ ↯

4) $|U| = 3$ Ordnung 3

alle El. Ord. 3: $\{(1,2,3); (2,3,1), (3,1,2)\} = \langle (2,3,1) \rangle = \langle (3,1,2) \rangle$

Selbstinverse können nicht enthalten sein, da man sonst $\boxed{U_1 \leq U_2} \leq G$ hätte mit $|U_1| = 2$, $|U_2| = 3$ ↯ Korollar

Normalteiler

In diesem Kapitel geht es um spezielle Untergruppen nicht-kommutativer Gruppen. Speziell in dem Sinne, dass gewisse Aspekte der Kommutativität gelten.

Definition: Sei $N \leq G$. N heißt Normalteiler von G $:\Leftrightarrow$

$$gng^{-1} \in N \quad \forall g \in G \quad n \in N.$$

Bemerkung: a) Falls G kommutativ ist, ist jede Untergruppe Normalteiler.

b) Um Normalteiler zu sein, muß N eine Untergruppe sein!

Beispiele: a) die beiden trivialen Untergruppen $\{e\}, G$ sind immer Normalteiler: G: $gng^{-1} \in G$ gilt immer

$\{e\}$: $geg^{-1} = e$ ✓

b) Gegenbeispiel: $G = S_3$ $\quad U = \{(1,2,3);\ \underbrace{(1,3,2)}_{n}\}$

Wähle $g = (3,2,1) = g^{-1}$

$gng^{-1} = (3,2,1)\,(1,3,2)\,(3,2,1) = (2,1,3) \notin U.$

Satz: Seien $(G,\circ)$, $(H,\oplus)$ Gruppen, $f : (G,\circ) \to (H,\oplus)$ Homomorphismus. Dann ist $\ker f$ Normalteiler (von G).

Beweis: $\ker f$ ist Untergruppe wie oben gezeigt.

z.z. $gng^{-1} \in \ker f \quad \forall g \in G \quad n \in \ker f$.

z.z. $f(gng^{-1}) = e_H$

$$f(gng^{-1}) = f(g)\,f(n)\,f(g^{-1}) = f(g)\cdot \cancel{e_H}\, f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) =$$
$$= f(e_G) = e_H \quad \square$$

<u>Satz:</u> Sei $N \leq G$. Dann sind äquivalent:

a) N ist Normalteiler von G $(N \trianglelefteq G)$ $(gNg^{-1} \subset N)$

b) $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$

c) $gN = Ng \quad \forall g \in G$

d) $(gN)(hN) = gh\,N \quad \forall g,h \in G$

<u>Beweis:</u> a) $\Rightarrow$ b) Aus a) folgt $gNg^{-1} \subset N$. z.z. $N \subset gNg^{-1}$.

Sei also $n \in N$ beliebig, $g \in G$ z.z. $\exists\, m \in N$, $gmg^{-1} = n$

$m = g^{-1} n g$

Da N Normalteiler ist $g^{-1} n g \in N$ ✓

b) $\Rightarrow$ c) z.z. $\forall g \in G \; \forall n \in N \; \exists\, m \in N$ mit $gn = mg$

$(\Rightarrow gN \subset Ng)$. $m = gng^{-1} \in N$ ✓

(Alternativ: Vor: $gNg^{-1} = N \quad | \cdot g$ von rechts

$gN = Ng$)

c) $\Rightarrow$ d) $(gN)(hN) \overset{c)}{=} (Ng)(hN) = N[(gh)N] \overset{c)}{=} N[N(gh)] =$

$= N^2 gh = N gh \overset{c)}{=} gh\, N$ $\square$

Warum ist $N^2 = N$? Da benutzen wir, dass N Untergruppe!

$N^2 = N \circ N \subset N$. $\quad N \subset N \circ N$

↑ wähle $\{e\}$

d) $\Rightarrow$ a) z.z. $gng^{-1} \in N \quad \forall g \in G \quad n \in N$

Teil d. Vorraussetzung "$\subset$": $\forall g,h \in G \; \forall n,m \in N \; \exists\, p \in N$, so dass

$gnhm = gh \cdot p$

Wähle $h = g^{-1}$, $m = e \Rightarrow \forall g \in G \; \forall n \in N \; \exists\, p \in N$ so dass

$gng^{-1}\cancel{e} = \cancel{gg^{-1}}\,p \in N$ $\square$.