Hausaufgaben zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Blatt 1

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Entscheiden Sie bei folgenden Mengen, ob es sich zusammen mit den jeweiligen Verknüpfungen um Gruppen handelt:

(a) Die Menge $5\mathbb{Z} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$ zusammen mit der Addition ganzer Zahlen

(b) Die Menge $\mathbb{R}^+$ zusammen mit der üblichen Addition

(c) Die Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit der üblichen Multiplikation

(d) Die Menge aller 2×2-Matrizen zusammen mit der Multiplikation von Matrizen.

Loesungsvorschlag. (a) Die Menge $5\mathbb{Z} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$ zusammen mit der Addition ganzer Zahlen ist eine Gruppe.

Da wir in der Vorlesung bereits gesehen haben, dass $\mathbb{Z}$ bezüglich der Addition eine Gruppe ist, und wir hier eine Teilmenge der ganzen Zahlen mit der gleichen Operation betrachten, können wir uns ein bisschen Arbeit sparen.

So ist die Addition ja auf ganz $\mathbb{Z}$ assoziativ, also ist sie insbesondere auch auf $5\mathbb{Z}$ assoziativ.

Wir müssen noch nachweisen, dass es ein Neutrales Element und Inverse gibt.

Das neutrale Element ist die 0. Die Eigenschaft, dass für alle $k \in 5\mathbb{Z}$ gilt, dass

$$0 + k = k,$$

folgt wieder direkt aus der entsprechenden Eigenschaft in $\mathbb{Z}$.

Auch die Inversen funktionieren wie in $\mathbb{Z}$. Das Inverse zu einer Zahl k ist also $-k$. Wir müssen nur kurz sicherstellen, dass falls $k \in 5\mathbb{Z}$ dann auch $-k \in 5\mathbb{Z}$. Aber wenn eine Zahl ein vielfaches von 5 ist, dann gilt das natürlich auch für -1 mal die Zahl.

(b) Die Menge $\mathbb{R}^+$ zusammen mit der üblichen Addition ist keine Gruppe. Da 0 nicht positiv ist, gilt $0 \notin \mathbb{R}^+$ und somit gibt es kein neutrales Element.

(c) Die Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit der üblichen Multiplikation ist keine Gruppe. Es gilt zwar die Assoziativität und das neutrale Element ist $1 \in \mathbb{R}$. Allerdings hat die Null bekannter Weise kein multiplikativ Inverses. Denn für alle Zahlen $r \in \mathbb{R}$ gilt $r \cdot 0 = 0 \neq 1$.

(d) Die Menge aller 2×2-Matrizen zusammen mit der Multiplikation von Matrizen ist keine Gruppe. Gott sei Dank bleibt uns damit die Überprüfung der Assoziativität erspart.

Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allerdings haben nicht alle Matritzen ein Inverses. Ähnlich wie beim letzten Beispiel findet man diesmal zur Matrix mit nur Nullen als Eintrag kein Inverses. Denn egal mit welcher Matrix man multipliziert, es ergbit sich immer wieder die Nullmatrix.

In diesem Fall gibt es sogar unendlich viele Matrizen die kein Inverses haben, nämlich alle 2×2 Matrizen mit Determinante 0.

$\square$

Aufgabe 2 *(3 Punkte)***:** Gegeben Sei eine Menge Ω. Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Teilmengen von Ω (auch Potentzmenge genannt).

Auf $\mathcal{G}$ sei durch folgende Vorschrift eine Verknüpfung definiert:

$$A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \ .$$

Zeigen sie, dass $(\mathcal{G}, \circ)$ eine Gruppe ist. Wie lautet das neutrale Element? Wie das Inverse einer beliebigen Menge $A \subset \Omega$?

Loesungsvorschlag. Wir beginnen mit dem interesanten Teil. Neutrales Element und Inverse und kümmern uns am Ende um die Assoziativität.

In der Potenzmenge einer allgemeinen Menge, über die wir nichts wissen, gibt es eigentlich nur zwei Kandidaten als neutrales Elelement. Die einzigen zwei Teilmengen, die es immer gibt sind die Menge Ω selbst und die leere Menge $\emptyset$.

Wenn man beides überprüft, stellt man fest das Ω selbst nicht funktioniert, für die leere Menge erhalten wir aber für alle $A \in \mathcal{G}$

$$\emptyset \circ A = (\emptyset \cup A) \setminus (\emptyset \cap A) = A \setminus \emptyset = A.$$

Damit ist das neutrale Element also die leere Menge.

Für das Inverse zu einer Menge A muss also gelten $A^{-1} \circ A = \emptyset$.

Man kann die Lösung durch rumprobieren herausfinden. Alternativ folgt dem Ansatz

$$(A^{-1} \cup A) \setminus (A^{-1} \cap A) = \emptyset$$

und schließt

$$A^{-1} \cup A \subseteq A^{-1} \cap A.$$

Hier erkennt man , dass dieses Teilmengenverhältnis nur für $A^{-1} = A$ erfüllt ist. Wenn man ganz ordentlich sein will, folgt das aus

$$A \subseteq A^{-1} \cup A \subseteq A^{-1} \cap A \subseteq A^{-1}$$

und

$$A^{-1} \subseteq A^{-1} \cup A \subseteq A^{-1} \cap A \subseteq A.$$

Tatsächlich kann man leicht nachrechnen, dass

$$A \circ A = \emptyset.$$

Damit haben wir auch unser Invereses gefunden.

Es bleibt die Assoziativität zu überprüfen. Seien also $A, B, C \subseteq \Omega$ drei Teilmenegen. Wir wollen zeigen, dass

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C).$$

Man kann diese Aussage durch eine (etwas umständliche) Rechnung mit vielen Umformungen beweisen.

Wir machen einen unnötig komplizierten aber eleganten und spaßigen Beweis.

Man sieht leicht, dass $x \in A \circ B$ genau dann wenn x **entweder** in A **oder** in B liegt.

Wir fassen den Wahrheitswert von Aussagen wie $x \in A$ und $x \in B$ als 0 (= falsch) und 1 (=wahr) auf. Nun können wir damit rechnen. Wie üblich gilt $0+0 = 0, 1+0 = 0+1 = 1$, allerdings setzen wir $1 + 1 = 0$. In anderen Worten wir rechnen Modulo 2.

In diesem System gilt

$$x \in A \circ B = x \in A + x \in B.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} x \in A \circ (B \circ C) &= x \in A + (x \in B + x \in C) \\ &= x \in A + x \in B + x \in C \\ &= (x \in A + x \in B) + x \in C \\ &= (x \in A \circ B) + x \in C \\ &= x \in (A \circ B) \circ C. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 *(3 Punkte)***:** Für beliebige $s, t \in \mathbb{R}^+$ sei auf $\mathbb{R}^+$ folgende Verknüpfung definiert:

$$x \circ y = s(xy)^t \ .$$

Für welche Wahl von s, t ist $(\mathbb{R}^+, \circ)$ eine Gruppe. Wie lautet das neutrale Element in Abhängigkeit von s und t? Wie das Inverse zu einer Zahl $x \in \mathbb{R}^+$?

Loesungsvorschlag. Anders als sonst beginnen wir mit der Assoziativität.

Damit es sich um eine Gruppe handeln kann, muss für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

gelten. Setzen wir die Definition ein erhalten wir

$$s(s(xy)^t \cdot z)^t = s(x \cdot s(yz)^t)^t.$$

Vereinfacht man beide Seiten erhält man die Gleichung

$$ss^t x^{t^2} y^{t^2} z^t = ss^t x^t y^{t^2} z^{t^2}.$$

Da wir auf den positiven reellen Zahlen arbeiten dürfen wir ohne Probleme kürzen. Somit ergibt sich

$$x^{t^2} z^t = x^t z^{t^2}.$$

Da diese Gleichung für alle x gilt dürfen wir $x = 1$ und $z = 2$ setzen und haben endlich die Gleichung $2^t = 2^{t^2}$. Damit folgt aber, dass $t = t^2$ und da wir wissen, dass $t > 0$ gelten muss, ist die einzige Lösung $t = 1$. Damit die Assoziativität erfüllt ist, muss also $t = 1$ gelten.

Unsere Verknüpfung ist also deutlich einfacher geworden: $x \circ y = sxy$.

Nun lässt sich das neutrale Element und die Inversen leicht finden.

Für das neutrale Element suchen wir ein $e \in \mathbb{R}^+$ sodass

$$x = e \circ x = sex.$$

Damit ergibt sich sofort $e = \frac{1}{s}$.

Für die Inversen suchen wir zu jedem x ein y sodass

$$x \circ y = sxy = e = \frac{1}{s}.$$

Hier ergbit sich $y = \frac{1}{s^2 x}$.

Es handelt sich also für $t = 1$ und $s \in \mathbb{R}^+$ um eine Gruppe. Das neutrale Element und die Inversen haben wir eben angegeben.

<u>Bemerkung:</u> Bei dieser Aufgabe muss man mit der Notation aufpassen, da x^{-1} für das Inverse bezüglich der neuen Vernüpfung $\circ$ oder wie oft üblich für das multiplikativ Inverse stehen kann. $\square$