# Hausaufgaben zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

## Blatt 2

**Aufgabe 1** *(1 Punkt)***:** Zeigen Sie, dass für jede kommuntative Gruppe $(G, \circ)$ das folgende Potenzgesetz gilt:

$$\forall a, b \in G, n \in \mathbb{Z} : \quad (a \circ b)^n = a^n \circ b^n \; .$$

**Aufgabe 2** *(1 Punkt)***:** Es sei $\Omega$ eine Menge, $\circ$ die Verknüpfung auf der Potentmenge von $\Omega$ definiert in Aufgabe 2 Blatt 1.

Bestimmen sie $A^n$ für alle Mengen $A \subset \Omega$ und alle $n \in \mathbb{Z}$.

**Aufgabe 3** *(2 Punkte)***:** Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen der angegebenen Gruppen?

- Die Menge der geraden ganzen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung $+$.
- Die Menge der ungeraden ganzen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung $+$.
- Die Menge der positiven reellen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit der Multiplikation von reellen Zahlen als Verknüpfung.
- Die Menge der negativen reellen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit der Multiplikation von reellen Zahlen als Verknüpfung.
- Die Menge der $n \times n$ Matrizen mit Determinante 1 als Teilmenge der Invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit dem Matrixprodukt als Verknüpfung.
- Die Menge der $n \times n$ Matrizen mit Determinante 1 als Teilmenge der aller $n \times n$-Matrizen mit dem Matrixaddition als Verknüpfung.

**Aufgabe 4** *(4 Punkte)*: Es sei $\Omega$ eine Menge. Wie in Aufgabe 2 auf Blatt 1 gezeigt bildet die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ zusammen mit der in Aufgabe 2 auf Blatt 1 definierten Verknüpfung eine Gruppe.

(a) Es sei $\mathcal{A}$ eine nichtleer Teilmenge der Potenzmenge von $\Omega$, welche folgende Eigenschaften erfüllt

1) Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist auch $A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$
2) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Zeigen sie, dass $\mathcal{A}$ eine Untergruppe von $(\mathcal{P}(\Omega), \circ)$ ist.

Bemerkung: Eine solche Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge nennt man auch Mengenalgebra.

(b) Es seien $A, B \subset \Omega$ zwei beliebige Teilmengen von $\Omega$. Geben Sie die kleinste Untergruppe von $(\mathcal{P}(\Omega), \circ)$ an, die $A$ und $B$ enthält.

(c) Geben Sie für die Fälle $B = A$ und $B = A^c$ die kleinste Untergruppe so konkret wie möglich an und überprüfen Sie, ob die Mengen die Bedingungen aus Aufgabenteil a) erfüllen.

**Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 16.11.2022, um 8.00 Uhr.**