MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

WiSe 2022/23

# Hausaufgaben zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

## Lösungsvorschlag zu Blatt 2

**Aufgabe 1** *(1 Punkt)***:** Zeigen Sie, dass für jede kommuntative Gruppe $(G, \circ)$ das folgende Potenzgesetz gilt:

$$\forall a, b \in G, n \in \mathbb{Z}: \quad (a \circ b)^n = a^n \circ b^n \ .$$

*Beweis.* Seien $a, b \in G$ beliebig.

Wir zeigen die Aussage zunächst per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Für $n = 0$ ist die Aussage klar, da $(a \circ b)^0 = e = e \circ e = a^0 \circ b^0$. Hierbei bezeichnet $e$ das neutrale Element.

Nun nehmen wir an, dass die Aussage für ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und zeigen unter dieser Annahme, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt.

Es gilt

$$(a \circ b)^{n+1} = (a \circ b)^n \circ (a \circ b) \stackrel{I.V.}{=} (a^n \circ b^n) \circ (a \circ b) = a^{n+1} \circ b^{n+1},$$

wobei wir im letzten Schritt die Assoziativität und Kommutativität von $G$ benutzt haben.

Damit gilt die Aussage nach Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Sei nun $k \in \mathbb{Z}$. Für $k \geq 0$ haben wir die Aussage eben bewiesen. Für $k < 0$ gilt:

$$(a \circ b)^k = ((a \circ b)^{-k})^{-1} = (a^{-k} \circ b^{-k})^{-1} = (b^{-k})^{-1} \circ (a^{-k})^{-1} = a^k \circ b^k.$$

Hierbei haben wir einerseits benutzt, dass $-k > 0$ und wir in diesem Fall die Aussage schon kennen und andererseits das Potenzgesetz sowie Assoziativität und Kommutativität verwendet. □

**Aufgabe 2** *(1 Punkt)***:** Es sei $\Omega$ eine Menge, $\circ$ die Verknüpfung auf der Potentmenge von $\Omega$ definiert in Aufgabe 2 Blatt 1.

Bestimmen sie $A^n$ für alle Mengen $A \subset \Omega$ und alle $n \in \mathbb{Z}$.

*Lösungsvorschlag.* Sei $A \subseteq \Omega$. In Aufgabe 2 auf Blatt 1 haben wir gesehen, dass $A \circ A = \emptyset$. Außerdem wissen wir, dass $A \circ \emptyset = A$.

Das heißt, dass $A^1 = A, A^2 = \emptyset, A^3 = A$ und so weiter. Wir schließen für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = \begin{cases} A \text{ falls n ungerade ist} \\ \emptyset \text{ falls n gerade ist} \end{cases} .$$

Wenn man ganz sauber arbeiten will, kann man diese Aussage mit einer kurzen Induktion beweisen.

Weiter gilt, dass $A^0$ das neutrale Element, also $A^0 = \emptyset$, sein muss.

Da alle Mengen bezüglich dieser Verknüpfung selbstinvers sind, gilt $A^{-k} = (A^k)^{-1} = A^k$. Damit lässt sich unsere Fallunterscheidung auf alle $\mathbb{Z}$ fortsetzen. Es gilt also für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$A^k = \begin{cases} A \text{ falls k ungerade ist} \\ \emptyset \text{ falls k gerade ist} \end{cases} .$$

□

**Aufgabe 3** *(2 Punkte)***:** Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen der angegebenen Gruppen?

- Die Menge der geraden ganzen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung $+$.
- Die Menge der ungeraden ganzen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung $+$.
- Die Menge der positiven reellen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit der Multiplikation von reellen Zahlen als Verknüpfung.
- Die Menge der negativen reellen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit der Multiplikation von reellen Zahlen als Verknüpfung.
- Die Menge der $n \times n$ Matrizen mit Determinante 1 als Teilmenge der Invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit dem Matrixprodukt als Verknüpfung.
- Die Menge der $n \times n$ Matrizen mit Determinante 1 als Teilmenge der aller $n \times n$-Matrizen mit dem Matrixaddition als Verknüpfung.

*Lösungsvorschlag.* Die geraden Zahlen sind eine Untergruppe, die ungeraden Zahlen sind keine Untergruppe. Die Beweise haben wir (quasi) auf Tutoriumsblatt 1 gesehen, nur kannten wir da den Begriff Untergruppe noch nicht.

Die Menge der positiven reellen Zahlen ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Sie enthält das neutrale Element 1, ist abgeschlossen bezüglich $\cdot$, denn für $x, y > 0$ ist auch $x \cdot y > 0$ und auch abgeschlossen bezüglich Inversen, da für $x > 0$ auch $\frac{1}{x} > 0$.

Die negativen reellen Zahlen hingegen sind keine Untergruppe, da $(-1) \cdot (-1) = 1 > 0$. Außerdem enthalten sie nicht das neutrale Element 1.

Die Menge der $n \times n$ Matrizen mit Determinante 1 sind eine Teilmenge der intvertiebaren $n \times n$ Matrizen mit dem Matrixprodukt. Das folgt sofort aus den beiden Regeln für invertierbare Matrizen $A, B$:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad , \qquad \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Hierraus lässt sich sofort folgern, dass falls $A$ und $B$ Determinante 1 haben, dann auch $A^{-1}$ und $A \cdot B$ Determinante 1 haben.

Bezüglich Addition ist die Eigenschaft $\det = 1$ nicht abgeschlossen. So gilt für die Einheitsmatrix $\mathbb{E}_n$:

$$\det(\mathbb{E}_n) = 1$$

aber für $\mathbb{E}_n + \mathbb{E}_n = 2 \cdot \mathbb{E}_n$ gilt

$$\det(2 \cdot \mathbb{E}_n) = 2^n \neq 1.$$

□

**Aufgabe 4** *(4 Punkte)***:** Es sei $\Omega$ eine Menge. Wie in Aufgabe 2 auf Blatt 1 gezeigt bildet die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ zusammen mit der in Aufgabe 2 auf Blatt 1 definietten Verknüpfung eine Gruppe.

(a) Es sei $\mathcal{A}$ eine nichtleer Teilmenge der Potenzmenge von $\Omega$, welche folgende Eigenschaften erfüllt

1) Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist auch $A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$
2) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Zeigen sie, dass $\mathcal{A}$ eine Untergruppe von $(\mathcal{P}(\Omega), \circ)$ ist.

Bemerkung: Eine solche Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge nennt man auch Mengenalgebra.

(b) Es seien $A, B \subset \Omega$ zwei beliebige Teilmengen von $\Omega$. Geben Sie die kleinste Untergruppe von $(\mathcal{P}(\Omega), \circ)$ an, die $A$ und $B$ enthält.

(c) Geben Sie für die Fälle $B = A$ und $B = A^c$ die kleinste Untergruppe so konkret wie möglich an und überprüfen Sie, ob die Mengen die Bedingungen aus Aufgabenteil a) erfüllen.

*Lösungsvorschlag.* (a) Sei $\mathcal{A}$ eine nichtleere Teilmenge der Potenzmenge von $\Omega$, welche die genannten Eigenschaften erfüllt.

Um zu zeigen, dass es sich um eine Gruppe handelt, müssen wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ nicht leer, abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung $\circ$ und abgeschlosen bezüglich der Inversenbildung ist.

$\mathcal{A}$ ist nach Aufgabenstellung nicht leer, und da wir bereits auf dem letzten Blatt gesehen haben, das alle Mengen zu sich selbst invers sind, ist sie offensichtlich auch abgeschlossen bezüglich Inversenbildung.

Es bleibt also zu zeigen, dass aus 1) und 2) folgt, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen bezüglich $\circ$ ist.

Seien hierzu $A, B \in \mathcal{A}$.

Dann gilt wegen 1) auch $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ und dann liegen wegen 2) auch $A \cup B$ und $A^c \cup B^c$ in $\mathcal{A}$.

Zu Erinnerung: Wir versuchen zu zeigen, dass

$$A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \overbrace{(A \cup B)}^{\in \mathcal{A}} \cap \overbrace{(A^c \cup B^c)}^{\in \mathcal{A}}$$

in $\mathcal{A}$ liegt.

Wir sind schon relativ weit, allerdings haben wir keine Regeldie besagt, dass der Schnitt zweier Mengen aus $\mathcal{A}$ wieder in $\mathcal{A}$ liegen muss.

Diese Regel können wir aber aus 1) und 2) herleiten. Seien hierzu $N, M \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt $N \cap M = (N^c \cup M^c)^c$. Aus $N, M \in \mathcal{A}$ folgt also aus 1) $N^c, M^c \in \mathcal{A}$ und dann aus 2) $N^c \cup M^c \in \mathcal{A}$ und schließlich wieder mit 1)

$$N \cap M = (N^c \cup M^c)^c \in \mathcal{A}.$$

Wenden wir diese Regel mit $N = A \cup B \in \mathcal{A}$ und $M = A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$ an, folgt wie gewünscht $A \circ B \in \mathcal{A}$.

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass es sich bei jedem $\mathcal{A}$ was die Bedingungen erfüllt um eine Untergruppe handelt.

(b) Wir suchen also eine Untergruppe die, die $\{A, B\}$ als Teilmenge hat. Damit es sich um eine Untergruppe handelt ergänzen wir das neutrale Element, also $\emptyset$ sowie $A \circ B$. Wir landen also bei

$$\{\emptyset, A, B, A \circ B\}.$$

Als nächstes müssten wir auch $A \circ (A \circ B)$ und $B \circ (A \circ B)$ und soweiter ergänzen.

Tatsächlich handelt es sich aber schon um ein Untergruppe: Sie enthält das neutrale Element, sie ist abgeschlossen bezüglich Inversen (weil alles Selbstinvers ist) und man überprüft leicht, dass sie abgeschlossen bezüglich Verknüpfung ist. Denn

$$A \circ (A \circ B) = (A \circ A) \circ B = \emptyset \circ B = B$$

und genau so gilt

$$B \circ (A \circ B) = (B \circ B) \circ A = \emptyset \circ A.$$

Natürlich kann es sein, dass z.B. $A = B$ gilt und wir Dinge doppelt genannt haben. Etwas mehr dazu in (c).

(c) Für $B = A$ gilt $A \circ B = A \circ A \emptyset$ und aus unserer Menge wird $\{\emptyset, A\}$. Für $A \neq \Omega$ erfüllt die Menge die Bedingung 1) aus Aufgabenteil $a$) nicht, da $A^c \notin \{\emptyset, A\}$.

Für $B = A^c$ erhalten wir $A \circ B = A \circ A^c = \Omega$ und somit ist unsere Untergruppe durch

$$\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

gegeben.

Hier überprüft man leicht, dass die Menge sowohl 1) als auch 2) erfüllt. So gilt z.B. $\emptyset^c = \Omega$ und $A \cup A^c = \Omega$ usw.

Die kleinste Untergruppe erfüllt also manchmal die Bedingungen, aber nicht immer.

$\square$

**Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 16.11.2022, um 8.00 Uhr.**