MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT WiSe 2022/23
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Hausaufgaben zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Blatt 3

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeige, daß die Menge $Z(G) := \{g \in G \mid g \circ h = h \circ g \quad \forall h \in G\}$ eine Untergruppe von G ist. Man nennt $Z(G)$ das Zentrum von G.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: (a) Sei M die Menge aller reellen 2×2 Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Zeigen Sie, dass M eine Untergruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung ist.

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei der Abbildung $f : M \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gegeben durch $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + ib$ um einen Gruppenhomomorphismus von $(M, \cdot)$ nach $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ handelt. Hier bezeichnet $\cdot$ die Matrixmultiplikation bzw. das Produkt komplexer Zahlen.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: (a) Bestimmen Sie die von allen Primzahlen erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

(b) Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{R}, +)$ an.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Es sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen den zwei endlichen Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, \otimes)$. Ferner sei für ein beliebiges $g \in G$ die Ordnung von g definiert als die Mächtigkeit des Erzeugnisses von g, d.h. $o(g) := | < g > |$.

Zeigen Sie, dass $o(g)$ in jedem Fall ein Vielfaches von $o(f(g))$ ist und dass $o(g) = o(f(g))$ für alle $g \in G$ genau dann gilt, wenn f injektiv ist.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 30.11.2022, um 8.00 Uhr.