Hausaufgaben zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Blatt 3

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeige, daß die Menge $Z(G) := \{g \in G \mid g \circ h = h \circ g \quad \forall h \in G\}$ eine Untergruppe von G ist. Man nennt $Z(G)$ das Zentrum von G.

Lösungsvorschlag. Das Zentrum ist nicht leer, denn das neutrale Element kommutiert mit allen Elementen der Gruppe.

Sei nun $g \in Z(G)$. Dann gilt für g^{-1} und ein beliebiges $h \in G$.

$$g^{-1} \circ h = (h^{-1} \circ g)^{-1} \overset{g \in Z(G)}{=} (g \circ h^{-1})^{-1} = h \circ g^{-1}.$$

Da $h \in G$ beliebig war, folgt dass $g^{-1} \in Z(G)$.

Seien nun $g_1, g_2 \in Z(G)$. Sei wieder $h \in G$ beliebig, dann gilt

$$(g_1 \circ g_2) \circ h = g_1 \circ (g_2 \circ h) \overset{g_2 \in Z(G)}{=} g_1 \circ (h \circ g_2) = (g_1 \circ h) \circ g_2 \overset{g_1 \in Z(G)}{=} h \circ g_1 \circ g_2.$$

Damit ist $Z(G)$ nicht leer und abgeschlossen bezüglich Inverser und Verknüpfung und somit eine Untergruppe. □

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*:

(a) Sei M die Menge aller reellen 2×2 Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Zeigen Sie, dass M eine Untergruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung ist.

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei der Abbildung $f : M \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ gegeben durch $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + ib$ um einen Gruppenhomomorphismus von $(M, \cdot)$ nach $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ handelt. Hier bezeichnet $\cdot$ die Matrixmultiplikation bzw. das Produkt komplexer Zahlen.

Lösungsvorschlag. zu a) Zunächst ist die Menge dieser Matrizen nicht leer, denn die Einheitsmatrix hat diese Form mit $a = 1$ und $b = 0$. Außerdem erhalten wir als Determinante einer solchen Matrix $a^2 + b^2$, und da nicht $a = b = 0$ gelten darf, sind solche Matrizen invertierbar.

Weiter berechnet man das Produkt zweier solcher Matrizen als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -bx - ay & -by + ax \end{pmatrix}.$$

Das Produkt hat also wieder die passende Form mit $ax - by$ und $ay + bx$. Außerdem kann das Ergebnis, nicht die Nullmatrix sein, denn als Produkt zweier invertierbarer Matrizen, ist auch diese Matrix invertierbar.

Dank der Regel für Inverse von 2×2 Matrizen, wissen wir, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Für $a' = \frac{a}{a^2+b^2}$ und $b' = \frac{-b}{a^2+b^2}$ hat also auch das Inverse wieder die richtige Form.

Es handelt sich also um eine Untergruppe.

zu b) Zunächst stellen wir fest, dass

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + 0i = 1.$$

Das neutrale Element in M wird also auf das neutrale Element in $\mathbb{C}$ abgebildet.

Mit unserer Rechnung von a) wissen wir

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right) = (ax - by) + i(ay + bx).$$

Gleichzeitig gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) \cdot f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right) = (a+bi)\cdot(x+yi) = ax+ayi+bxi+byi^2 = ax-by+(ay+bx)i.$$

Die Abbildung ist also kompatibel mit den jeweiligen Multiplikationen.

Damit handelt es sich um einen Gruppenhomomorphismus.

□

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: (a) Bestimmen Sie die von allen Primzahlen erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

(b) Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{R}, +)$ an.

Lösungsvorschlag. zu a) Wir suchen also die kleinste Untergruppe von $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ die alle Primzahlen enhält.

Das es sich um eine Untergruppe handeln soll, muss sie abgeschlossen bezüglich Multiplikation und Inversenbildung sein. Also muss sie auch alle Primzahlpotenzen enthalen, also p^k für $k \in \mathbb{Z}$ und p prim enthalten.

Damit die Menge abgeschlossen bezüglich Multiplikation bleibt, müssen wir alle möglichen Produkte ergänzen, also

$$\left\{ \prod_{k=1}^{N} p_k^{a_k} \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, p_1, \ldots p_n \text{ Primzahlen} \right\}$$

Dabei handelt es sich um die Menge der positiven Rationallen Zahlen. Dass alle Zahlen, die sich so schreiben lassen rational sind, ist leicht zu sehen. Sei umgekehrt eine beliebige Zahl in $\mathbb{Q}^+$ gegeben. Diese lässt sich als $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ schreiben und a und b haben dann jeweils eine eindeutige Primfaktorzerlegung. Teilt man die beiden Zerlegungen durcheinander, erhält man eine "Primfaktorzerlegung"bei der negative Potenzen möglich sind, also genau ein Element aus der oben genannten Menge.

Die erzeugte Untergruppe ist also $\mathbb{Q}^+$.

zu b) Sei $g : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt $g(0) = 0$. Sei nun $a = g(1)$. Da es sich um ein Gruppenhomomorphismus handelt gilt

$$g(2) = g(1+1) = g(1) + g(1) = a + a = 2a$$

.

Mit einer kurzen Induktion kann man nachweisen, dass $g(n) = na$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da g als Gruppenhomomorphismus verträglich mit Inversen sein muss, folgt

$$g(-n) = -g(n) = -na$$

.

Damit ist der gesamt Gruppenhomomorphismus durch seinen Wert $g(1)$ bestimmt.

Umgekehrt sieht man leicht, dass tatsächlich für jedes $a \in \mathbb{R}$ durch $g(m) = ma$ ein Gruppenhomomorphismus definiert ist.

$\square$

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Es sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen den zwei endlichen Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, \otimes)$. Ferner sei für ein beliebiges $g \in G$ die Ordnung von g definiert als die Mächtigkeit des Erzeugnisses von g, d.h. $o(g) := | < g > |$.

Zeigen Sie, dass $o(g)$ in jedem Fall ein Vielfaches von $o(f(g))$ ist und dass $o(g) = o(f(g))$ für alle $g \in G$ genau dann gilt, wenn f injektiv ist.

Lösungsvorschlag. Sei $g \in G$ beliebig gewählt.

Wir können unsere Abbildung f auf $< g >$ Einschränken. Das Bild besteht aus Elementen der Form $f(g^k) = f(g)^k$ und ist sicher in $< f(g) >$ enthalten. Wir können also ab jetzt die Abbildung $f :< g > \to < f(g) >$ betrachten.

Vom Tutoriumsblatt wissen wir, dass $g^{o(g)} = e_G$ und $f(g)^{o(f(g))} = e_H$, wobei e_G und e_H die neutralen Element ind G beziehungsweise H sind. Außerdem haben wir auf dem Tutoriumsblatt gesehen, dass die Ordnung die kleinste positive Potenz ist, sodass diese Gleichung erfüllt ist ($\star$).

Wir wissen

$$f(g)^{o(g)} = f(g^{o(g)}) = f(e_G) = e_H.$$

Also muss $o(g) \geq o(f(g))$ gelten.

Wir können also in den natürlichen Zahlen mit Rest teilen und erhalten

$$o(g) = q \cdot o(f(g)) + r,$$

mit $q \geq 0$ und $0 \leq r < o(f(g))$.

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $f(g)^r = e_H$ was mit $0 \leq r < o(f(g))$ und ($\star$) beweist, dass $r = 0$.

Es gilt

$$e_H = f(g)^{o(g)} = f(g)^{q \cdot o(f(g))+r} = (f(g)^{o(f(g))})^q \otimes f(g)^r = e_H^q \otimes f(g)^r.$$

Hierraus folgt aber $f(g)^r = e_H$ und wie zuvor besprochen, folgt da $r < o(f(g))$ und aus der Tatsache, dass $o(f(g))$ die kleinste positive Potenz ist für die $f(g)^{o(f(g))} = e_H$ ist, dass r nicht positiv sein kann. Also muss $r = 0$ gelten, was impliziert, dass $o(g)$ ein Vielfaches von $o(f(g))$ sein muss.

Falls f injektiv ist, ist auch unsere Einschränkung $f :< g > \to < f(g) >$ injektiv. Diese Einschränkung ist aber auf surjektiv, da sich jedes Element rechts als $f(g)^k = f(g^k)$ schreiben lässt. Diese Eingeschränkte Abbildung ist also bijektiv, also müssen beide Gruppen gleich mächtig sein, was genau $o(g) = o(f(g))$ beweist.

Zu guter Letzt müssen wir noch zeigen, dass f injektiv ist, falls für alle $g \in G$ gilt, dass $o(g) = o(f(g))$. Das beweisen wir durch Kontraposition, nehmen also an dass f nicht injektiv ist. Nach Vorlesung gibt es dann ein Element $g \in G$ mit $g \neq e_G$ aber $f(g) = e_H$.

Dann gilt $o(g) > 1$ aber $o(f(g)) = 1$. Also gilt nicht für alle Elemente die Gleichheit. Aus Kontraposition folgt nun die gewünschte Implikation.

$\square$

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 30.11.2022, um 8.00 Uhr.