

# Hausaufgaben zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl  
Kajetan Söhnen

## Lösungsvorschlag zu Blatt 4

**Aufgabe 1** (2 Punkte): Entscheiden Sie bei allen Untergruppen der symmetrischen Gruppe  $\mathbb{S}_3$  ob es sich jeweils um einen Normalteiler handelt. Bestimmen Sie sodann alle Linksnebenklassen der Untergruppe  $\{(1, 2, 3); (1, 3, 2)\}$ .

*Lösungsvorschlag.* Die Gruppe  $\mathbb{S}_3$  hat die Untergruppen

$$\begin{aligned} &\{(1, 2, 3)\} \\ &\{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}, \quad \{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}, \quad \{(1, 2, 3), (2, 1, 3)\} \\ &\{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\} \\ &\mathbb{S}_3 \end{aligned}$$

Die Gruppe selbst, und die Untergruppe die nur das neutrale Element  $(1, 2, 3)$  sind wie bei allen Gruppen Normalteiler.

Die Untergruppen mit jeweils zwei Elementen sind keine Normalteiler. Es gilt z.B.

$$(3, 2, 1), (1, 3, 2), (3, 2, 1) = (2, 1, 3).$$

Das heißt für das Element  $(1, 3, 2)$  in der Untergruppe  $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$  haben wir das Element  $g = (3, 2, 1)$  gefunden, sodass  $g^{-1}(1, 3, 2)g$  nicht mehr in der Untergruppe liegt. Damit kann es sich nicht um einen Normalteiler handeln. Analog kann man auch für die anderen beiden zweielementigen Untergruppen zeigen, dass es sich nicht um Normalteiler handelt.

Es bleibt die Untergruppe  $\{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\}$ . Hierbei handelt es sich um einen Normalteiler. Entweder man rechnet die Definition direkt nach, oder etwas eleganter nutzt man die Signumsfunktion. Aus der Linearen Algebra 1 wissen wir, dass  $\text{sgn}(\pi \circ \sigma) = \text{sgn}(\pi) \cdot \text{sgn}(\sigma)$ . Das bedeutet es handelt sich um einen Gruppenhomomorphismus von  $\mathbb{S}_3$  in die Gruppe  $\{-1, 1\}$  mit Mal. Die Untergruppe die wir betrachten besteht genau aus den Elementen mit Signum gleich Eins, also dem Kern des Gruppenhomomorphismus. Damit handelt es sich um einen Normalteiler.

Zu guter letzt geben wir alle Linksnebenklassen von  $U = \{(1, 2, 3); (1, 3, 2)\}$  an. Das heißt für alle  $\pi$  in  $\mathbb{S}_3$  müssen wir  $\pi \circ (1, 3, 2)$  berechnen. So erhalten wir als Linksnebenklassen

$\pi$	$\pi U$
(1, 2, 3)	{(1, 2, 3), (1, 3, 2)}
(1, 3, 2)	{(1, 3, 2), (1, 2, 3)}
(3, 2, 1)	{(3, 2, 1), (2, 3, 1)}
(2, 1, 3)	{(2, 1, 3), (3, 1, 2)}
(3, 1, 2)	{(3, 1, 2), (2, 1, 3)}
(2, 3, 1)	{(2, 3, 1), (3, 2, 1)}

Hier sieht man sehr schön, dass es jede Linksnebenklasse zweimal gibt. Wir hätten also gar nicht alle ausrechnen müssen, sondern nach dem 4. Schritt aufhören können. Denn da hatten wir bereits 3 verschiedene Nebenklassen gefunden und wir wissen aus der Vorlesung, dass es  $6 : 2 = 3$  Linksnebenklassen gibt.  $\square$

**Aufgabe 2** (2 Punkte): Es seien die komplexwertigen Matrizen  $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ,  $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $C := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  gegeben, ferner sei  $\mathbb{H} := \{\pm E; \pm A; \pm B; \pm C\}$

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{H}$  bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. Geben Sie alle Untergruppen von  $\mathbb{H}$  an und überprüfen Sie jeweils, ob diese Normalteiler von  $\mathbb{H}$  sind.

*Lösungsvorschlag.* Da die Gruppe in der Gruppe der invertierbaren Matrizen lebt, reicht es zu zeigen, dass es sich um eine Untergruppe handelt.

Man sieht leicht, dass  $A^4 = B^4 = C^4 = E$ . Damit reicht es zu zeigen, dass die Menge  $\mathbb{H}$  abgeschlossen bezüglich Verknüpfung ist, da die Abgeschlossenheit bezüglich Inversenbildung dann sofort folgt.

Es gilt  $A^2 = B^2 = C^2 = -E$  und  $AB = C, BA = -C, AC = -B, CA = B, BC = A, CB = -A$ . Da man die Vorzeichen jeweils vor die Matrixmultiplikation ziehen kann und  $E$  das neutrale Element ist, haben wir damit alle Verknüpfungen überprüft und somit nachgewiesen, dass es sich um eine (Unter)Gruppe handelt.

Wir geben die Untergruppen von  $\mathbb{H}$  an.  $\pm A, \pm B, \pm C$  haben alle Ordnung 4 und  $E$  hat Ordnung Eins während  $-E$  Ordnung 2 hat.

Als Untergruppen ergeben sich somit

$$\begin{aligned} &\{E\} \\ &\{E, -E\} \\ &\{E, \} \end{aligned}$$

$\square$

**Aufgabe 3** (2 Punkte): Es seien  $(G, \circ)$  und  $(H, \oplus)$  Gruppen,  $f : (G, \circ) \rightarrow (H, \oplus)$  ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a)  $N \trianglelefteq G \Rightarrow f(N) \trianglelefteq \text{im } f$ .

*Lösungsvorschlag.* Wir müssen zeigen, dass falls  $N$  ein Normalteiler in  $G$  ist,  $f(N)$  ein Normalteiler in  $\text{im } f$  ist.

Sei hierzu  $h \in f(N)$  und  $y \in \text{im } f$  beliebig. Wir wollen zeigen, dass  $y^{-1}hy \in f(N)$  gilt.

Nach Definition vom Bild, finden wir ein  $g \in N$  und  $x \in G$  sodass  $f(g) = h$  und  $f(x) = y$ . Da  $N$  ein Normalteiler in  $G$  ist, liegt  $x^{-1}gx$  wieder in  $N$ . Es gilt also

$$y^{-1}hy = f(x)^{-1}f(g)f(x) = f(x^{-1}gx) \in f(N).$$

□

(b) Falls  $ggT(|H|, |G|) = 1$  (d.h.  $|H|$  und  $|G|$  sind teilerfremd) so ist  $f(g) = e_H$  für alle  $g \in G$ .

*Lösungsvorschlag.* Sei  $g \in G$  beliebig. Wir haben auf Blatt 3 gesehen, dass die Ordnung von  $g$  ein Vielfaches der Ordnung von  $f(g)$  ist. Oder anderes formuliert: Die Ordnung von  $f(g)$  teilt die Ordnung von  $g$ , welche nach Vorlesung wiederum  $|G|$  teilen muss. Also teilt die Ordnung von  $f(g)$  auch  $|G|$ . Gleichzeitig teilt die Ordnung von  $f(g)$  aber auch  $|H|$ , da  $f(g) \in H$ . Die Ordnung von  $f(g)$  teilt also sowohl  $|G|$  als auch  $|H|$  und somit auch den  $ggT(|H|, |G|) = 1$ . Damit muss die Ordnung bereits gleich Eins sein, und das einzige Element in  $H$  mit Ordnung Eins ist das neutrale Element  $e_H$ . Damit gilt  $f(g) = e_H$ . Da  $g \in G$  beliebig war, folgt die Aussage. □

**Aufgabe 4** (2 Punkte): Zeigen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung kleiner gleich 5 abelsch sind.

*Lösungsvorschlag.* Wir betrachten also Gruppen mit 1, 2, 3, 4 oder 5 Elementen.

Falls die Gruppe nur ein Element hat, kommutiert dieses eine Element natürlich mit sich selber.

Falls die Gruppe 2, 3 oder 5 Elemente hat, ist die Gruppe nach dem Tutoriumsblatt abelsch, da die Anzahl der Elemente eine Primzahl ist.

Es bleibt ein interessanter Fall. Was ist wenn die Gruppe 4 Elemente hat?

Alle Elemente außer dem neutralen Element haben nach der Vorlesung entweder Ordnung 4 oder 2. Falls ein Element Ordnung 4 hat, erzeugt dieses Element die ganze Gruppe und sie ist zyklisch und somit abelsch. Gibt es kein Element mit Ordnung 4 haben alle Elemente (außer dem neutralen Element) Ordnung 2. Es gilt also für alle Elemente  $g$  in dieser Gruppe, dass  $g^2 = e$ . Damit ist die Gruppe, wieder nach dem Tutoriumsblatt, abelsch. □

**Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 07.12.2022, um 8.00 Uhr.**