MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Hausaufgaben zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Blatt 4

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Sei G eine endliche Gruppe mit Normalteiler $N \trianglelefteq G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\{U \trianglelefteq G \mid N \trianglelefteq U\} \to \{W \trianglelefteq G/N\}$$

mit $U \mapsto U/N$ bijektiv ist.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ als Gruppe bezüglich Addition. Weiter sei $U = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ und $V = \{(-x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Skizzieren Sie U und V sowie die Nebenklasse $(0,2) + U$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2/U \cong V$.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Wir betrachten $\mathbb{Z}$ mit Addition. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a\mathbb{Z}/\operatorname{kgV}(a,b)\mathbb{Z} \cong \operatorname{ggT}(a,b)\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Es seien A, B, C abelsche Gruppen. Eine Sequenz mit linearen Abbildungen f, g

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

heißt *kurze exakte Sequenz*, falls f injektiv, g surjektiv und $\operatorname{im}(f) = \operatorname{kern}(g)$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass bei einer kurzen exakten Sequenz C isomorph zu $B/f(A)$ ist.

(b) Es seien G, H abelsche Gruppen. Wir betrachten die Gruppe $G \times H$ mit Verknüpfung

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \circ_G g_2, h_1 \circ_H h_2).$$

Zeigen Sie, dass H isomorph zu $(G \times H)/(G \times \{e_h\})$ ist.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 11.01.2022, um 8.00 Uhr.