MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Hausaufgaben zu Algebraische Strukturen / Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Blatt 5

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Sei G eine endliche Gruppe mit Normalteiler $N \trianglelefteq G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\{U \trianglelefteq G \mid N \trianglelefteq U\} \to \{W \trianglelefteq G/N\}$$

mit $U \mapsto U/N$ bijektiv ist.

Lösungsvorschlag. Wir haben bereits gesehen, dass die Abbildung eine Bijektion zwischen den Untergruppen darstellt. Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass sie Normalteiler auf Normalteiler abbildet und das alle Normalteil in G/N so getroffen werden.

Mathematisch gesagt, wir müssen zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert und surjektiv ist. Injektivität folgt aus dem Resultat aus der Vorlesung.

Sie hierzu U ein Normalteiler in G mit $N \subseteq U$. Sei $g \in G$ und $u \in U$ beliebig. Dann gilt

$$g^{-1}NuNgN = g^{-1}ugN \in U/N,$$

da U Normalteiler ist und entsprechend $g^{-1}ug \in U$ gilt. Damit ist aber auch U/N ein Normalteiler in G/N.

Angenommen U ist kein Normalteiler. Dann finden wir $g \in G$ und $u \in U$ sodass $g^{-1}ug \notin U$. Damit gilt auch

$$g^{-1}NuNgN = g^{-1}ugN \notin U/N.$$

Diese Aussage ist nicht ganz offensichtlich, aber angenommen es gäbe ein $v \in U$ sodass $vN = g^{-1}ugN$. Dann gäbe es ein $n \in N \subseteq U$ mit $vn = g^{-1}ug$. Aber $vn \in U$ und $g^{-1}ug \notin U$, also kann es so ein v nicht geben. Damit haben wir gezeigt, dass die Abbildung surjektiv ist. □

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ als Gruppe bezüglich Addition. Weiter sei $U = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ und $V = \{(-x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Skizzieren Sie U und V sowie die Nebenklasse $(0,2) + U$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2/U \cong V$.

Lösungsvorschlag. Skizze siehe Zoommitschnitt. Offensichtlich bildet $(1,1), (-1,1)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Jedes v lässt sich also eindeutig durch $a(1,1)+b(-1,1)$ darstellen. Die Zuordung $v \mapsto (a,b)$ respektiert Addition und wir definieren $f : \mathbb{R} \to V$ durch $f(v) = b(-1,1)$, also die Projektion auf V. Die Abbildung ist offensichtlich surjektiv und wie vorhin erwähnt respektiert die Abbildung Addition und somit haben wir einen surjektiven Gruppenhomomoprhismus gefunden. Der Kern der Abbildung sind genau solche v für die $b = 0$ gilt, also $v = a(1,1)$. Mit anderen Worten der Kern ist genau durch U gegeben. Die gewünschte Isomorphie folgt nun direkt aus dem Homomorphiesatz. □

Aufgabe 3 *(2 Punkte)***:** Wir betrachten $\mathbb{Z}$ mit Addition. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a\mathbb{Z}/\operatorname{kgV}(a,b)\mathbb{Z} \cong \operatorname{ggT}(a,b)\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}.$$

Lösungsvorschlag. Es gilt $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \operatorname{kgV}(a,b)\mathbb{Z}$ und $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \operatorname{ggT}(a,b)\mathbb{Z}$. Damit folgt die Aussage direkt aus dem 1. Isomorphiesatz mit $N = b\mathbb{Z}$ und $U = a\mathbb{Z}$ der besagt, dass $U/U \cap N \cong U + N/N$. (Hierbei nutzen wir wieder die additive Schreibeweise $U+N$ während in der allgemeinen Formulierung UN multiplkativ geschrieben ist) □

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Es seien A, B, C abelsche Gruppen. Eine Sequenz mit linearen Abbildungen f, g

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

heißt *kurze exakte Sequenz*, falls f injektiv, g surjektiv und $\operatorname{im}(f) = \operatorname{kern}(g)$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass bei einer kurzen exakten Sequenz C isomorph zu $B/\operatorname{im}(f)$ ist.

Lösungsvorschlag. Wir betrachten die surjektive Abbildung $g : B \mapsto C$. Nach Homomorphiesatz und weil $\operatorname{im}(f) = \operatorname{kern}(g)$ folgt

$$B/\operatorname{im}(f) = B/\operatorname{kern}(g) \cong C.$$

□

(b) Es seien G, H abelsche Gruppen. Wir betrachten die Gruppe $G \times H$ mit Verknüpfung

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \circ_G g_2, h_1 \circ_H h_2).$$

Zeigen Sie, dass H isomorph zu $(G \times H)/(G \times e_H)$ ist.

Lösungsvorschlag. Folgt direkt aus (a) mit $f : G \to G \times H, g \mapsto (g, e_H)$ und $g : G \times H \to H$ mit $(g,h) \mapsto h$. □

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 11.01.2022, um 8.00 Uhr.