Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Blatt 1b

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Gegeben sei die folgende Abbildung $\mathbf{b} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = 5ac - 2ad + bd \, .$$

Zeigen sie, dass $\mathbf{b}$ eine Bilinearform ist. Geben Sie für die kanonische Einheitsbasis $\mathcal{K} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ sowie für die Basis $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ jeweils die Gramsche Matrix von b an.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Gegeben sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem Körper K sowie Untervektorräume $U, W \subset V$ mit $U \cap V = \{0\}$. Es seien die Bilinearformen $a : U \times U \to K$ und $b : W \times W \to K$ gegeben.

A bzw. B seien die entsprechenden Gram'schen Matrizen von a bzw b zu gegebenen Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von U bzw. W.

Zeigen Sie: Durch $c : (U \oplus W) \times (U \oplus W) \to K$ mit $c(u + w, x + y) = a(u, x) + b(w, y)$ für $u, x \in U$ und $w, y \in W$ ist eine Bilinearform auf $U \oplus W$ definiert. Geben Sie die Gram'sche Matrix dieser Bilinearform zur Basis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform $b : V \times V \to K$ in eindeutiger Weise in eine symmetrische Bilinearform $b^s : V \times V \to K$ und eine antisymmetrische Bilinearform $b^a : V \times V \to K$ zerlegen lässt, d.h. $b = b^s + b^a$.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $2 \leq \dim V < \infty$. Zeigen Sie, dass folgende Aussage <u>nicht</u> für jede Bilinearform $b \colon V \times V \to K$ gilt:

$$b(v, v) = 0 \; \forall v \in V \Rightarrow b = 0 \, .$$

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 09.11.2022, um 8.00 Uhr.