MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Blatt 1b

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Gegeben sei die folgende Abbildung $\mathbf{b} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = 5ac - 2ad + bd\ .$$

Zeigen sie, dass $\mathbf{b}$ eine Bilinearform ist. Geben Sie für die kanonische Einheitsbasis $\mathcal{K} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ sowie für die Basis $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ jeweils die Gramsche Matrix von $\mathbf{b}$ an.

Loesungsvorschlag. Um zu zeigen, dass es ich um eine Bilinarform handelt, überprüfen wir für $a, b, a', b', c, d, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) + \lambda \mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right).$$

Auf der linken Seite erhalten wir

$$5(a + \lambda a')c - 2(a + \lambda a')d + (b + \lambda b')d$$

und auf der rechten Seite

$$5ac - 2ad + bd + \lambda(5a'c - 2a'd + b'd).$$

Mit ein paar Umformungen sieht man leicht, dass beide Terme gleich sind.

Analog müsste man auch noch die Linearität in der zweiten Komponente überprüfen. Wir nutzen aber einen alternativen Beweis.

Für die Aufgabe müssen wir ohne hin die Gram'sche Matrix angeben. Wir berechnen

$$\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 5 - 0 + 0 = 5$$

$$\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 - 2 + 0 = -2$$

$$\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0 - 0 + 0 = 0$$

$$\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 - 0 + 1 = 1.$$

Als Gram'sche Matrix bezüglich der Standartbasis ergibt sich somit

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen fest, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5c - 2d \\ d \end{pmatrix} = 5ac - 2ad + bd = \mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right).$$

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass es sich bei Abbildungen dieser Form immer um Bilinearformen handelt.

Warnung: Es reicht nicht die Gram'sche Matrix anzugeben um zu zeigen, dass es sich um eine Bilinearform handelt. Man muss kurz überprüfen, dass sich die Bilienarform tatsächlich wie hier durch die Matrix darstellen lässt. Trotzdem ist es manchmal eine praktische Alternative.

Die Gram'sche Matrix hängt natürlich von der Basis ab. Bezüglich der zweiten Basis berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 5 - 2 + 1 = 6 \\
\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= 5 - (-2) - 1 = 6 \\
\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 5 - 2 - 1 = 2 \\
\mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= 5 - (-2) + 1 = 8.
\end{aligned}$$

Als Matrix bezüglich dieser Basis ergibt sich also

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Gegeben sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem Körper K sowie Untervektorräume $U, W \subset V$ mit $U \cap V = \{0\}$. Es seien die Bilinearformen $a : U \times U \to K$ und $b : W \times W \to K$ gegeben.

A bzw. B seien die entsprechenden Gram'schen Matrizen von a bzw b zu gegebenen Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von U bzw. W.

Zeigen Sie: Durch $c : (U \oplus W) \times (U \oplus W) \to K$ mit $c(u + w, x + y) = a(u, x) + b(w, y)$ für $u, x \in U$ und $w, y \in W$ ist eine Bilinearform auf $U \oplus W$ definiert. Geben Sie die Gram'sche Matrix dieser Bilinearform zur Basis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an.

Lösungsvorschlag. Als erstes machen wir uns klar, wie c genau definiert ist. Für jedes $v \in U \oplus W$ gibt es eine *eindeutige* Zerlegung $v = u + w$, mit $u \in U, w \in W$.

Für $v_1, v_2 \in U \oplus W$ definieren wir also $c(v_1, v_2)$ indem wir die eindeutige Zerlegung $v_1 = u + w$ und $v_2 = x + y$ mit $u, x \in U$ und $w, y \in W$ nutzen und dann wie in der Aufgabenstellung $c(v_1, v_2) = c(u + w, x + y)$.

Nun kommen wir zu Lineratität. Seien also $u, x \in U$ und $w, y \in W$ sowie $\lambda \in K$ und $v \in U \oplus W$ gegeben. Sei $v = u' + w'$ die eindeutige Zerlegung von v, dann ist die eindeutige Zerlegung von

$$u + w + \lambda v = (u + \lambda u') + (w + \lambda w').$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} c(u + w + \lambda v, x + y) &= c((u + \lambda u') + (w + \lambda w'), x + y) \\ &= a((u + \lambda u'), x) + b((w + \lambda w'), y) \\ &= a(u, x) + \lambda a(u', x) + b(w, y) + \lambda b(w', y) \\ &= a(u, x) + b(w, y) + \lambda(a(u', x) + b(w', y)) \\ &= c(u + w, x + y) + \lambda c(u' + w', x + y), \end{aligned}$$

wobei wir die Linearität von a und b im ersten Argument genutzt haben. Da $v = u' + w'$ folgt die Linearität im ersten Argument für c. Die Linearität im zweiten Argument folgt analog.

Um zu verstehen wie die Gramsche Matrix aussieht müssen wir verstehen wie c auf alle möglichen Kombinationen aus Basisvektoren aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wirkt. Seien hierfür $u_i, u_j \in \mathcal{A}$ und $w_k, w_l \in \mathcal{B}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} c(u_i, u_j) &= c(u_i + 0, u_j + 0) = a(u_i, u_j) + b(0, 0) = a(u_i, u_j) \\ c(u_i, w_l) &= c(u_i + 0, 0 + w_l) = a(u_i, 0) + b(0, w_l) = 0 \\ c(w_l, u_i) &= c(0 + w_l, u_i + 0) = a(0, w_l) + b(u_i, 0) = 0 \\ c(w_l, w_k) &= c(0 + w_l, 0 + w_k) = a(0, 0) + b(w_l, w_k) = b(w_l, w_k). \end{aligned}$$

Wenn wir uns an die Definition der Gramschen Matrix erinnern, haben wir genau die Einträge von A und B wieder gefunden und viele Nullen.

Als Gramsche Matrix von c bzgl. der Basis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ergibt sich also die Blockmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 3 *(2 Punkte)***:** Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform $b : V \times V \to K$ in eindeutiger Weise in eine symmetrische Bilinearform $b^s : V \times V \to K$ und eine antisymmetrische Bilinearform $b^a : V \times V \to K$ zerlegen lässt, d.h. $b = b^s + b^a$.

Loesungsvorschlag. Wir definieren $b^T(x, y) = b(y, x)$ und setzen $b^s = \frac{1}{2}(b + b^T)$ sowie $b^a = \frac{1}{2}(b - b^T)$.

Man sieht sofort, dass $b = b^s + b^a$. Außerdem gilt

$$b^s(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b^T(x,y)) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)) = b^s(y,x).$$

Die Bilinearform ist also tatsächlich symmetrisch. Genau so überprüft man, dass b^a antisymmetrisch ist.

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Wir geben zwei Möglichkeiten.

1. Idee Sei $b = b^s + b^a$ eine beliebige Zerlegung (also apriori nicht zwingend die, die wir gerade angegeben haben). Dann gilt $b^s = b - b^a$, also

$$b^s(x,y) = b(x,y) - b^a(x,y)$$

und

$$b^s(x,y) = b^s(y,x) = b(y,x) - b^a(y,x) = b(y,x) + b^a(x,y).$$

Addieren wir beide Gleichungen erhalten wir

$$2b^s(x,y) = b(x,y) + b(y,x) + b^a(x,y) - b^a(x,y) = b(x,y) + b(y,x).$$

Damit folgt für diese beliebige Zerlegung, dass $b^s = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x))$. Die Wahl von b^s und damit auch die Wahl von b^a war also eindeutig.

2. Idee Seien $b = b^s + b^a = \tilde{b}^s + \tilde{b}^a$ zwei Zerlegungen. Das heißt, dass

$$b^s - \tilde{b}^s = \tilde{b}^a - b^a.$$

Da die Differenz von (anti-)symmetrischen Bilinearformen (anti-)symmetrisch ist, muss die linke Seite symmetrisch und die rechte Seite antisymmetrisch sein. Da beide Seiten gleich sind, haben wir also eine Bilinearform, die symmetrisch und antisymmetrisch ist, gefunden. Aus Aufgabe 3 vom Tutoriumsblatt folgt nun, dass

$$b^s - \tilde{b}^s = \tilde{b}^a - b^a = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass es keine zwei verschiedenen Zerlegungen geben kann.

Das char $K \neq 2$ ist, haben wir immer benutzt wenn wir durch zwei teilen oder $\frac{1}{2}$ hinschreiben. $\square$

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $2 \leq \dim V < \infty$. Zeigen Sie, dass folgende Aussage <u>nicht</u> für jede Bilinearform $b\colon V \times V \to K$ gilt:

$$b(v,v) = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow b = 0\ .$$

Loesungsvorschlag. Wir merken zunächst an, dass falls die Aussage wahr ist, (fast) jede Antisymmetrische Bilinearform gleich Null sein müsste. Denn für Antisymmetrische Bilinearformen gilt $b(v,v) = -b(v,v)$ woraus, zumindest in char $K \neq 2$, folgen würde, dass $b(v,v) = 0$ für alle $v \in V$ und damit dann ja $b = 0$.

Das bringt uns zur folgenden Idee: Wir wählen eine Basis von V und betrachten die Matrix A, die als Einträge nur 0 hat. Außer ganz oben rechts, wo der Eintrag 1 ist und ganz unten links wo der Eintrag -1 ist.

Diese Matrix definiert über $x^T Ay$ eine Bilinearform auf $V \times V$. Mit unser gewählten Basis können wir jedes $v \in V$ durch $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}$ darstellen, wobei $n = \dim V$. Mit dieser Darstellung rechnen wir nach, dass

$$v^T Av = v^T \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 v_n - v_n v_1 = 0.$$

Unsere Bilinearform erfüllt also die Bedingung der Implikation. Es handelt sich aber nicht um die triviale Bilinearform, denn es gilt z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Man muss beim Gegenbeispiel etwas aufpassen, da wir nicht wissen was für eine Charakteristik der Körper hat. □

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 09.11.2022, um 8.00 Uhr.