Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Blatt 2b

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Gegeben sei die reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wir betrachten die lineare Abbildung $l_A(x) = Ax$ und die Bilinearform $b_A(x,y) = x^T Ay$. Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$, bezüglich derer l_A diagonalgestalt hat. Geben Sie die darstellende Matrix von b_A bezüglich dieser Basis an. Was passiert mit den darstellenden Matrizen von l_A und b_A, falls man einen der Basisvektoren mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert?

Lösungsvorschlag. Um A zu diagonalisieren berechnen wir die EW von A. Wir betrachten $\det(A - \lambda\mathbb{E}) = \lambda^2 - 1$. Die EW sind also 1 und -1 und die Eigenvektoren dazu sind zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Diese beiden Vektoren bilden also eine mögliche Basis.

l_A in dieser Basis ist durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Wir berechnen

$$b(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

und analog die anderen Kombinationen von Basisvektoren und erhalten so die darstellende Matrix zu b_A

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen sind also "ähnlich", aber nicht gleich.

Falls wir einen Basisvektor mit λ multiplizieren ändert sich bei der Darstellung von l_A nichts. Schließlich ist z.B. $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ immernoch ein EV zum EW 1. Bei der Darstellung von b_A müssten wir, aufgrund der Bilinearität von b_A, den entsprechenden Diagonaleintrag mit λ^2 multiplizieren.

□

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Die Bilinearform $\det : K^2 \times K^2 \to K$ hat in jeder Basis die Darstellung $A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ für $a \in K$, d.h. bei Basiswechsel bleibt die Darstellung bis auf einen Faktor erhalten.

Lösungsvorschlag. Bezüglich der Standardbasis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von K^2 ist die Determinante durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Sei nun b_1, b_2 eine beliebige andere Basis.

Sei weiter B die Basiswechselmatrix von b_1, b_2 zur Standardbasis, also $B \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $B \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt nach Vorlesung für die darstellende Matrix $A_{\{b_1,b_2\}}$ von det bezüglich b_1, b_2:

$$A_{\{b_1,b_2\}} = B^t AB.$$

In Matrizen übersetzt müssen wir also nur zeigen, dass für alle möglichen Matrizen B gilt, dass $B^t AB = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$. Sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann gilt

$$B^t AB = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - ac & ad - bc \\ bc - ad & bd - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix},$$

für $k = ad - bc = \det(B)$.

$\square$

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K. Wir betrachten die Menge der Bilinearformen $V \times V \to K$ als Gruppe bezüglich Addition.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der antisymmetrischen Bilinearformen eine Untergruppe bildet.

(b) Entscheiden Sie in den folgenden Fällen ob die Untergruppe der antisymmetrischen Bilinearformen zyklisch ist.

  (i) $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$

  (ii) $K = K_3$, also der dreielementige Körper, und $V = K_3^2$

  (iii) $K = K_3$ und $V = K_3^3$.

Lösungsvorschlag. (a) Die Menge der antisymmetrischen Bilinearformen enthält das neutrale Element, nämlich die Triviale Bilinearform $b(v, w) = 0$ für alle v, w. Zudem ist die Summe zweier antisymmetrischen Bilinearformen antisymmetrisch denn

$$(a+b)(v,w) = a(v,w) + b(v,w) = -a(w,v) - b(w,v) = -(a+b)(w,v).$$

Analog ist für eine antisymmetrische Bilinearform $b(v,w)$ auch ihr Inveses bezüglich Addition, also $-b(v,w)$ antisymmetrisch.

(b) Wir wählen in jedem Raum die Standardbasis und können dann über die Untergruppe der Antisymmetrischen Matrizen reden.

(i) Die antisymmetrischen Matrizen haben in diesem Fall genau die Form $\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$, mit $x \in \mathbb{R}$. Es gibt also überabzählbar viele solche Matrizen, aber jede zyklische Gruppe ist per Definition abzählbar. Damit kann die Untergruppe in diesem Fall nicht zyklisch sein.

(ii) Wieder haben die antisymmetrischen Matrizen die Form $\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$, diesmal jedoch mit $x \in K_3$. In diesem Fall überprüft man leicht, dass die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ die Gruppe zyklisch erzeugt.

(iii) Diesmal haben die antisymmetrischen Matrizen die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$$

mit $x, y, z \in K_3$. Da man also für x, y, z jeweils 3 Möglichkeiten hat, gibt es $3^3 = 27$ verschiedene solche Matrizen.

Eine zyklische Gruppe über K_3 kann jedoch höchstens 3 Elemente haben. Sei hierzu A eine beliebige antisymmetrische Matrix und $\{k \cdot A \mid k \in \mathbb{Z}\}$ die von ihr erzeugte zyklische Gruppe. Dann gilt $3 \cdot A = 0$, da wir über K_3 arbeiten, und somit $4 \cdot A = A$ und so weiter.

Damit ist die Untergruppe der antisymmetrischen Matrizen in diesem Fall zu groß um zyklisch zu sein.

$\square$

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Finden Sie eine symmetrische Bilinearform $b : K_2^2 \times K_2^2 \to K_2$, die in keiner Basis dargestellt, diagonalgestalt hat. K_2 ist hier der zweielementige Körper $\{0, 1\}$.

Lösungsvorschlag. Wir haben auf diesem Blatt schon eine Möglichkeit gesehen, nämlich die Bilinearform det auf $K_2^2 \times K_2^2$. Auf den ersten Blick ist sie mit ihrer darstellenden Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht symmetrisch. Aber da in K_2 gilt, dass $-1 = 1$ ist, ist die Matrix tatsächlich symmetrisch. In Aufgabe 2 haben wir bewiesen, dass diese Bilinearform bezüglich jeder Basis die Form $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ hat, also nie Diagonalgestalt hat. Wenn man ganz genau sein will, muss man den Fall $a = 0$ ausschließen, da die Nullmatrix ja doch Diagonalgestallt hätte. Da die Determinante, aber nicht die Nullbilinearform ist, kann ihre darstellende Matrix auch nicht durch einen Basiswechsel zur Nullmatrix werden. $\square$

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 23.11.2022, um 8.00 Uhr.