

Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Blatt 3b

Aufgabe 1 (2 Punkte): Gegeben sei die Bilinearform $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit der darstellenden Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Basis des \mathbb{R}^3 , so dass die entsprechende darstellende Matrix diagonal ist und ausschließlich die Werte 0, 1 und -1 enthält. Wie sieht für ein beliebiges $r \in \mathbb{R}$ die Menge $b(x, x) = r$ in dieser Basis aus?

Aufgabe 2 (2 Punkte): Zeigen Sie, dass auf der Menge der reellen 2×2 Matrizen durch $\text{spur}(AB)$ eine Bilinearform definiert ist. Geben Sie eine Basis an, so dass die entsprechende darstellende Matrix diagonal ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte): Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum ($\dim V = n$) und $b : V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform. Eine Basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ heißt orthogonal bzgl. b , falls $b(e_i, e_j) = 0$ für alle $j \neq i$ und orthonormal bzgl. b falls außerdem $b(e_i, e_i) = 1$ für alle i .

Zeigen Sie:

- (a) Die Gramsche Matrix zu einer orthogonalen Basis ist immer diagonal.
- (b) Die Gramsche Matrix zu einer orthonormalen Basis ist immer die Einheitsmatrix.

Aufgabe 4 (2 Punkte): Wir betrachten $V = \mathbb{R}^n$ als Vektorraum über \mathbb{R} . Sei $b : V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform. Zeigen Sie

- (a) Falls es eine orthogonale Basis bzgl. b gibt, so ist b symmetrisch.
- (b) Falls es eine orthonormale Basis bzgl. b gibt, so ist b ein Skalarprodukt.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 07.12.2022, um 8.00 Uhr.