MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2022/23

Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Blatt 3b

Aufgabe 1 *(3 Punkte)***:** Gegeben sei die Bilinearform $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der darstellenden Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, so dass die entsprechende darstellende Matrix diagonal ist und ausschließlich die Werte 0, 1 und -1 enthält.

Wie sieht für ein beliebiges $r \in \mathbb{R}$ die Menge $b(x,x) = r$ in dieser Basis aus?

Lösungsvorschlag. Es gibt verschiedene Möglichkeiten diese Aufgabe zu lösen. Hier ein Vorschlag.

Wir suchen eine Matrix B, sodass $B^T AB$ diagonalgestalt hat.

Zunächst kümmern wir uns um die letzte Spalte/Zeile. Dazu multiplizieren wir die Spalte und Zeile mit $\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes addieren wir die letzte Zeile/Spalte zur ersten Zeile/Spalte und ziehen sie einmal von der zweiten Zeile/Spalte ab. In Matrixnotation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun addieren wir die zweite Zeile/Spalte dreimal zur ersten Zeile/Spalte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sind fast am Ziel. Wir multiplizieren die erste Zeile/Spalte mit $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ also

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten nun

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

B ist also der Basiswechsel.

Da wir in diesem Fall mit der Standardbasis gestartet haben, ist unsere neue Basis durch $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$ gegeben. Wir nennen diese Vektoren ab jetzt b_1, b_2, b_3. Die darstellende Matrix bezüglich dieser Basis ist, genau so haben wir die Basis gebastelt, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wer möchte kann gerne nachrechnen, dass tatsächlich $b_1^T A b_1 = b_3^T A b_3 = 1$ sowie $b_2^T A b_2 = -1$ gilt und, dass das Ergebnis bei gemischten Basisvektoren, wie z.B. $b_1^T A b_2$ immer gleich 0 ist.

Nun zur Bonusfrage. Wie sieht die Menge der x mit $b(x, x) = r$ aus. Wir stellen x in unserer Basis dar, also

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3.$$

Dann gilt $b(x, x) = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = r$. Wir können diese Gleichung z.B. nach λ_2 umstellen und erhalten $\lambda_2 = \pm\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - r}$. Eine Lösung existiert also sinnvoller Weise nur falls $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 \geq r$ und wir erhalten als Lösungsmenge:

$$L_r = \left\{ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \geq r, \lambda_2 = \pm\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - r} \right\}.$$

$\square$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Zeigen Sie, dass auf der Menge der reellen 2×2 Matrizen durch $\operatorname{spur}(AB)$ eine Bilinearform definiert ist. Geben Sie eine Basis an, so dass die entsprechende darstellende Matrix diagonal ist.

Lösungsvorschlag. Wir überprüfen die Linearität in beiden Argumenten. Zunächst merken wir an, dass die Spur linear ist, also

$$\operatorname{spur}(A + \lambda B) = \operatorname{spur}(A) + \lambda \operatorname{spur}(B)$$

für alle Matrizen A, B und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Das heißt

$$b(A+\lambda B, C) \operatorname{spur}((A+\lambda B)C) = \operatorname{spur}(AC+\lambda BC) = \operatorname{spur}(AC)+\lambda \operatorname{spur}(BC) = b(A, C)+\lambda b(B, C).$$

Nun könnten wir auch die Linearität im zweiten Argument überprüfen. Nachdem wir, aber noch zeigen sollen, dass diese Bilinearform bezüglich der richtigen Basis diagonalgestalt hat, muss unsere Bilinarform symmetrisch sein. Tatsächlich gilt, auch wenn $AB \neq BA$, dass

$$\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA).$$

Eine mögliche Begründung ist, dass beide Seiten durch

$$\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$$

gegeben sind.

Nun kommen wir zur Suche nach einer passenden Basis:

Zunächst machen wir uns klar auch welchem Raum wir arbeiten. Unsere Bilinearform agiert auf den 2×2 Matrizen, also einem 4 dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein mögliche Basis bilden zum Beispiel die Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur besseren Notation nennen wir diese Basis, B_1, B_2, B_3, B_4. Diese Basis wirkt auf den ersten Blick viel versprechend, so gilt, dass

$$\mathrm{spur}(B_1, B_2) = \mathrm{spur}(B_1, B_3) = \mathrm{spur}(B_1, B_4) = \mathrm{spur}(B_4 B_2) = \mathrm{spur}(B_4, B_3) = 0.$$

Wir stoßen nur auf ein Problem, denn es gilt

$$\mathrm{spur}(B_2, B_3) = \mathrm{spur}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = 1.$$

Bezüglich dieser Basis ist die darstellende Matrix also nur "fast" Diagonal.

Wie können wir dieses Problem lösen? Die darstellende Matrix sieht im Moment wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie in Aufgabe 1 können wir einen Basiswechsel vollziehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die darstellende Matrix diagonalisert. Was ist also unsere Basis? Die Basiswechselmatrix ist durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B_1 und B_2 bleiben also gleich, während B_2 auf $B_2 + B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und B_3 auf $B_2 - B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ abgebildet wird.

Unsere Basis ist also durch $B_1, B_2 + B_3, B_2 - B_3, B_4$ gegeben.

$\square$

Aufgabe 3 *(1 Punkte)***:** Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ($\dim V = n$) und $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform. Eine Basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ heißt orthogonal bzgl. b, falls $b(e_i, e_j) = 0$ für alle $j \neq i$ und orthonormal bzgl. b falls außerdem $b(e_i, e_i) = 1$ für alle i.

Zeigen Sie:

(a) Die Gramsche Matrix zu einer orthogonalen Basis ist immer diagonal.

Lösungsvorschlag. Per Definition gilt, dass der ij-te Eintrag der Gramschen Matrix A durch $b(e_i, e_j)$ gegeben ist. Da wir mit einer orthogonalen Basis arbeiten, sind also alle Einträge mit $i \neq j$ gleich 0. Nur auf der Diagnalen können also theoretisch Einträge ungleich 0 stehen, die Matrix ist also diagonal. $\square$

(b) Die Gramsche Matrix zu einer orthonormalen Basis ist immer die Einheitsmatrix.

Lösungsvorschlag. Wie in (a) sind alle Einträge außerhalb der Diagonalen gleich 0. Da es sich diesmal sogar um eine orthonormal Basis handelt, gilt $b(e_i, e_i) = 1$ für alle i. Das bedeutet per Definition der Gramschen Matrix, dass auf der Diagnoalen nur 1er stehen. Wir haben also eine Matrix die auf der Diagonalen Einser und sonst nur Nuller hat, also die Einheitsmatrix. $\square$

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Wir betrachten $V = \mathbb{R}^n$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Sei $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform. Zeigen Sie

(a) Falls es eine orthogonale Basis bzgl. b gibt, so is b symmetrisch.

Lösungsvorschlag. Hatten wir sehr ähnlich auf Tutoriumsblatt 2b. Bezüglich der orthogonal Basis, hat b sogar diagonalgestalt. Insbesonderere ist sie also symetrisch (bzgl. dieser Basis). Symmetrie bleibt unter Basiswechsel erhalten, ist also eine Eigenschaft der Bilinearform unabhängig der gewählten Basis. Damit ist b also symmetrisch. $\square$

(b) Falls es eine orthonormale Basis bzgl. b gibt, so is b ein Skalarprodukt.

Lösungsvorschlag. Ein Skalarprodukt, ist eine Bilinearform die zusätzliche Eigenschaften erfüllt.

1. Symmetrie: Unsere Bilinearform ist nach a) symmetrisch.
2. $\forall x \in V : b(x,x) \geq 0$: Wir schreiben $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ wobei die e_i unsere orthonormal Basis sind. Dann gilt

$$b(x,x) = \sum \lambda_i^2 b(e_i, e_i) = \sum \lambda_i^2 \geq 0.$$

3. $b(x,x) = 0 \iff x = 0$: Die Rückrichtung falls $x = 0$ ist, ist für jede Bilinearform erfüllt. Sei umgekehrt x so gegeben, dass $b(x,x) = 0$. Mit der Notation aus 2. folgt, dass $\sum \lambda_i^2 = 0$. Da wir über $\mathbb{R}$ arbeiten, folgt, dass $\lambda_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots n$. Damit folgt $x = 0$.

Die Linearität in beiden Argumenten erfüllt jede Bilinearform per Definition, damit sind alle Eigenschaften eines Skalarprodukts nachgewiesen. $\square$

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 07.12.2022, um 8.00 Uhr.