Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Blatt 4b

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Es sei ω der Raum der Folgen über $\mathbb{R}$.

a) Wir betrachten den Raum der schließlich null werdenden Folgen c_{00} (vgl. Tutoriumsblatt). Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{B} = \{e^1, e^2, \ldots\}$ eine Basis bildet, wobei $e^i_i = 1$ und $e^i_j = 0$ für $j \neq i$.

b) Zeigen Sie, dass die Einsfolge $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots)$ nicht in $\operatorname{span} \mathcal{B}$ liegt und konstruieren Sie eine lineare Abbildung $f : \omega \to \mathbb{R}$, mit $f(e^i) = 0$ für alle i, während $f \neq 0$.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Fortsetzung von Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \omega \to c_{00}^\star$, die einer Folge x die Abbildung $a_n \mapsto \sum a_n x_n$ zuordnet linear und bijektiv ist. Wir definieren $f_i := \varphi(e^i)$.

b) Sei $\Phi : c_{00} \to (c_{00}^\star)^\star$ die natürliche Abbildung $x \mapsto (f \mapsto (f(x)))$.

   (i) Zeigen Sie, dass für alle $x \in c_{00}$ gilt: $\underset{i \in \mathbb{N}}{\forall} f_i(x) = 0 \implies \underset{f \in \omega^\star}{\forall} f(x) = 0$.

   (ii) Zeigen Sie, dass Φ *nicht* bijektiv ist, indem Sie ein Element in $(\omega^\star)^\star$ angeben, dass auf allen f_i verschwindet, aber nicht die Nullabbildung ist. (vgl 1b))

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Es seien U, W Untervektorräume eines endlichen Vektorraumes V über dem Körper K. Zeigen oder widerlegen Sie

(a) $(U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$

(b) $(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Es sei V ein Vektorraum, $V^\star$ der zugehörige Dualraum. Zeigen Sie, dass für jede lineare Abbildung $f : V \to V^\star$ durch $b(x, y) := f(x)(y)$ eine Bilinearform auf $V \times V$ definiert ist. Zeigen Sie dann, dass es für jede Bilinearform $b : V \times V \to K$ eine lineare Abbildung $f : V \to V^\star$ gibt, so dass $b(x, y) := f(x)(y)$ gilt.

Abgabe eines PDFs je Gruppe bis Mittwoch, den 21.12.2022, um 8.00 Uhr.