Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Blatt 4b

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Es sei ω der Raum der Folgen über $\mathbb{R}$.

a) Wir betrachten den Raum der schließlich null werdenden Folgen c_{00} (vgl. Tutoriumsblatt). Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{B} = \{e^1, e^2, \dots\}$ eine Basis bildet, wobei $e^i_i = 1$ und $e^i_j = 0$ für $j \neq i$.

Lösungsvorschlag. Es gilt, dass der $j$te Eintrag der Folge $\sum_{i=1}^N \lambda_i e^i$, genau λ_j ist. Deshalb muss damit die ganze Folge null ist, alle $\lambda_j = 0$ sein. Die Folgen sind also linear unabhängig.

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schließlich Null werdende Folge. Wir finden also ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $a_n = 0$ für $n > N$. Damit gilt:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^N a_i e^i.$$

Die Menge ist also linear unabhängig und ein erzeugenden System, also eine Basis. □

b) Zeigen Sie, dass die Einsfolge $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$ nicht in $\operatorname{span}\mathcal{B}$ liegt und konstruieren Sie eine lineare Abbildung $f : \omega \to \mathbb{R}$, mit $f(e^i) = 0$ für alle i, während $f \neq 0$.

Lösungsvorschlag. Wir haben bereits gesehen, dass $\operatorname{span}\mathcal{B} = c_{00}$ gilt. Da $\mathbf{1}$ offensichtlicht nicht schließlich 0 wird, liegt sie nicht im Spann. Das Problem ist, dass wir beim Spann nur endliche Summen zulassen, und sich $\mathbf{1}$ nur als unendliche Reihe der Basisvektoren schreiben lässt.

Damit ist $\mathbf{1}$ also linear unabhängig von $\mathcal{B}$ und wir können die linear unabhängige Menge $\mathcal{B}\cup\{\mathbf{1}\}$ zu einer Basis von ω ergänzen. Wir definieren f auf den Basiselementen wie folgt. $f(\mathbf{1}) = 1$ und auf allen anderen Basiselementen (denen aus $\mathcal{B}$ und denen die wir ergänzt haben) setzen wir $f = 0$. Damit ist f als lineare Abbildung eindeutig bestimmt und erfüllt per Definition die Bedingung. □

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Fortsetzung von Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \omega \to c_{00}^{\star}$, die einer Folge x die Abbildung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum a_n x_n$ zuordnet linear und bijektiv ist. Wir definieren $f_i := \varphi(e^i)$.

Lösungsvorschlag. Für die Linearität seien $x, y \in \omega$ zwei Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $a \in c_{00}$, dass

$$\varphi(\lambda x + y)(a) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n + y_n)a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n a_n = \big(\lambda\varphi(x) + \varphi(y)\big)(a).$$

Hierbei haben wir wieder verwendet, dass da a schließlich Null wird, die Reihen eigentlich endliche Summen sind, wo alles wunderbar funktioniert.

Damit stimmen beide Abbildungen auf allen $a \in c_{00}$ überein und sind somit gleich.

Es bleibt zu zeigen, dass φ bijektiv ist. Sei zunächst $f \in c_{00}^{\star}$. Als lineare Abbildung ist f durch ihre Werte auf der Basis $\mathcal{B}$ eindeutig definiert. Da

$$\varphi((f(e^i))_{i\in\mathbb{N}})(e^i) = f(e_i) = f(e^i)$$

gilt, müssen die beiden Abbildungen übereinstimmen. So lässt sich jede lineare Abbildung in $c_{00}^{\star}$ durch φ treffen, die Abbildung ist also surjektiv.

Sei nun $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ eine Folge, sodass $\varphi(a)$ die Nullabbildung ist. Das heißt $a_i = \varphi(a)(e^i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit ist a die Nullfolge und φ ist somit injektiv.

Damit ist gezeigt, dass φ eine lineare Bijektion ist. □

b) Sei $\Phi : c_{00} \to (c_{00}^{\star})^{\star}$ die natürliche Abbildung $x \mapsto (f \mapsto (f(x)))$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $x \in c_{00}$ gilt: $\underset{i\in\mathbb{N}}{\forall} f_i(x) = 0 \implies \underset{f\in c_{00}^{\star}}{\forall} f(x) = 0$.

Lösungsvorschlag. Sei also $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 0$. Angenommen für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $f_i(x) = 0$. Das heißt

$$0 = f_i(x) = \sum e_n^i x_n = x_i$$

für alle i. Damit ist x_i die Nullfolge und somit gilt natürlich für alle $f \in c_{00}^{\star}$, dass $f(x) = f(0) = 0$..

Da alle Abbildungen im Bild von Φ durch Auswertung eine Folge $x \in c_{00}$ gebildet werden, erfüllen alle Abbildungen im Bild von Φ diese Eigenschaft. □

(ii) Zeigen Sie, dass Φ *nicht* bijektiv ist, indem Sie ein Element in $(c_{00}^{\star})^{\star}$ angeben, dass auf allen f_i verschwindet, aber nicht die Nullabbildung ist. (vgl 1b))

Lösungsvorschlag. Da φ eine lineare Bijektion ist, und nach 1b) $\mathcal{B} \cup \mathbf{1}$ linear unabhängig sind, sind auch $\varphi(e^i) = f_i$ mit $\varphi\mathbf{1}$ linear unabhängig in $c_{00}^{\star}$. Wir können also wieder zu einer Basis ergänzen und dann eine Lineare Abbilfung $F : c_{00}^{\star} \to \mathbb{R}$, also ein Element in $(c_{00}^{\star})^{\star}$ definieren, die auf allen f_i verschwindet, aber auf $\varphi(\mathbf{1})$ den Wert Eins annimmt.

Diese Abbildung erfüllt offensichtlich nicht die Eigenschaft aus (i) und kann somit auch nicht im Bild von Φ liegen. Damit ist Φ nicht Bijektiv.

Das ist interessant, da die natürliche Abbildung Φ im endlichen Fall immer Bijektiv ist. □

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Es seien U, W Untervektorräume eines endlichen Vektorraumes V über dem Körper K. Zeigen oder widerlegen Sie

(a) $(U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$

Lösungsvorschlag. Diese Aussage ist wahr. Sei $f \in U^\circ \cap W^\circ$. Das heißt sowohl für alle $u \in U$ also auch für alle $w \in W$ gilt $f(u) = f(w) = 0$.

Also gilt auch für alle $v \in U + W$, die sich ja als $v = u + w$ für passendes $u \in U$ und $w \in W$ schreiben lassen,

$$f(v) = f(u + w) = f(u) + f(w) = 0 + 0 = 0$$

wobei wir die Linearität von f verwendet haben.

Sei nun umgekehrt $f \in (U + W)^\circ$. Dann für alle $u \in U \subseteq U + W$ und für alle $w \in W \subseteq U + W$, dass $f(u) = f(w) = 0$ und somit liegt f sowohl im Annulator von U als auch im Annulator von W und damit auch im Schnitt $U^\circ \cap W^\circ$. $\square$

(b) $(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$

Lösungsvorschlag. Zunächst beweisen wir die $\supseteq$ Richtung. Hierzu schreiben wir $f \in U^\circ + W^\circ$ als Summe $f = h + g$ wobei, h auf U und g auf W verschwindet. Für Elemente aus dem Schnitt $v \in U \cap W$ gilt also

$$f(v) = h(v) + g(v) = 0 + 0 = 0.$$

Damit ist diese Richtung bewiesen.

Die Rückrichtung direkt zu beweisen ist schwierig. Stattdessen nutzen wir ein Dimensionsargument. Hierzu sei $\dim V = n$.

Es gilt:

$$\dim((U \cap W)^\circ) = n - \dim(U \cap W)$$

und

$$\dim(U^\circ + W^\circ) = \dim U^\circ + \dim W^\circ - \dim(U^\circ \cap W^\circ)$$

Wir nutzen Aufgabenteil a) sowie die Dimensionsformel für den Annulator und erhalten

$$\begin{aligned}
\dim U^\circ + \dim W^\circ - \dim(U^\circ \cap W^\circ) &= n - \dim U + n - \dim W - \dim(U + W)^\circ \\
&= 2n - \dim U - \dim W - (n - \dim(U + W)) \\
&= n - \dim U - \dim W + (\dim U + \dim W - \dim U \cap W) \\
&= n - \dim U \cap W.
\end{aligned}$$

Damit haben beide Seiten die gleiche Dimension und aufgrund des gezeigten Teilmengenverhältnisses folgt die Gleichheit. $\square$

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Es sei V ein Vektorraum, $V^\star$ der zugehörige Dualraum. Zeigen Sie, dass für jede lineare Abbildung $f : V \to V^\star$ durch $b(x, y) := f(x)(y)$ eine Bilinearform auf $V \times V$ definiert ist. Zeigen Sie dann, dass es für jede Bilinearform $b : V \times V \to K$ eine lineare Abbildung $f : V \to V^\star$ gibt, so dass $b(x, y) := f(x)(y)$ gilt.

Beweis. Sei $f : V \to V^\star$ eine Lineare Abbildung. Dann ist für jedes $x \in V$, $f(x)$ eine Abbildung $V \to K$ und somit bildet unsere Abbildung b tatsächlich von $V \times V$ nach K ab.

Es bleibt zu überprüfen, dass b linear in beiden Argumenten ist. Die Linearität im ersten Argument folgt direkt, da f eine Lineare Abbildung ist, die Linearität im zweiten Argument folgt, da für jedes $x \in V$ auch $f(x)$ eine Lineare Abbildung ist.

Sei nun umgekehrt $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform. Wir definieren die Abbildung $f : V \mapsto V^\star$ wie folgt. Für jedes x müssen wir eine Lineare Abbildung $f(x) : V \to K$ definieren. Das machen wir indem wir für jedes $y \in V$ den Wert $f(x)(y)$ angeben. Sinnvollerweise definieren wir $f(x, y) = b(x, y)$. Damit ist f definiert. Es bleibt zu überprüfen, dass f Linear ist, und tatsächlich nach $V^\star$ abbildet, mit anderen Worten, dass für alle x auch $f(x)$ eine Lineare Abbildung ist.

Das f tatsächlich nach $V^\star$ abbildet, $f(x)$ also für alle x eine Lineare Abbildung ist, folgt aus der Linearität im zweiten Argument von b. Das f selbst eine Lineare Abbildung ist, folgt aus der Linearität von b im ersten Argument. $\square$