Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Blatt 5b

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang der Matrix ($= k$). Geben Sie sodann Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^3$ und $w_i \in \mathbb{R}^3$ an, so dass $A = \sum_{i=1}^{k} v_i w_i^t$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Sei K ein Körper, I, J seien Mengen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\alpha : Abb(I, K) \times Abb(J.K) \to Abb(I \times J, K) \qquad (f, g) \to f \otimes g$$

mit $(f \otimes g)(i, j) := f(i)g(j)$ multilinear ist.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)***:** Sei K ein Körper. In den folgenden Aufgabenteilen sind jeweils ein K-Vektorraum V und eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils das Tensorprodukt $V \otimes V$ und geben Sie die zu b gehörige lineare Abbildung $f_b : V \otimes V \to K$ an.

(a) $V = K^2$ und $b = \det$.

(b) $V = K[x]$ sei der Vektorraum aller Polynome einer Variablen. b sei die Bilinearform definiert durch $b(g, h) := \int_0^1 g(x)h(x)dx$.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Es sei V ein K-Vektorraum und $x, y \in V$. Wir betrachten $V \otimes V$. Zeigen Sie:

$$x \otimes y = y \otimes x \quad \Leftrightarrow \quad x, y \text{ sind linear abhängig.}$$

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 20.01.2022, um 8.00 Uhr.