Hausaufgaben zur Linearen Algebra 2

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen

Lösungsvorschlag zu Blatt 5b

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rank der Matrix k. Geben Sie sodann Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^3$ und $w_i \in \mathbb{R}^3$ an, so dass $A = \sum_{i=1}^k v_i w_i^t$

Beweis. Man sieht leicht, dass sich die 3. Zeile durch viermal die 1. Zeile minus einmal die zweite Zeile schreiben lässt. Da die erste und zweite Zeile offensichtlich linear unabhängig sind, ergibt sich ein Rang der Matrix von 2. Wir suchen also vier Vektoren v_1, v_2, w_1, w_2 um die Matrix darzustellen.

Die Matrix besteht in jeder Zeile aus Linearkombinationen von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Das nutzen wir und setzen $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir benötigen w_1 einmal in der ersten Zeile und viermal in der dritten. w_2 benötigen wir einmal in der zweiten Zeile und minuseinmal in der dritten. Deswegen setzen wir $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wir rechnen nach, dass

$$v_1 w_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$v_2 w_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt wie gewollt $A = v_1 w_1^t + v_2 w_2^t$. $\square$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Sei K ein Körper, I, J seien Mengen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\alpha : Abb(I,K) \times Abb(J,K) \to Abb(I \times J, K) \qquad (f,g) \to f \otimes g$$

mit $(f \otimes g)(i,j) := f(i)g(j)$ multilinear ist.

Beweis. Es seien $f_1, f_2 : I \to K$ und $g_1, g_2 : J \to K$ sowie $\lambda \in K$. Es gilt

$$\begin{aligned}\Big((f_1 + \lambda f_2) \otimes g\Big)(i,j) &= (f_1 + \lambda f_2)(i) \cdot g(j) \\ &= (f_1(i) + \lambda f_2(i))g(i) \\ &= f_1(i)g(j) + \lambda f_2(i)g(j) = \big(f_1 \otimes g\big)(i,j) + \big(\lambda(f_2 \otimes g)\big)(i,j).\end{aligned}$$

Damit stimmen die Abbildungen für alle (i,j) überein und sind somit als Abbildungen gleich. Analog lässt sich die Linearität im zweiten Argument überprüfen. $\square$

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Sei K ein Körper. In den folgenden Aufgabenteilen sind jeweils ein K-Vektorraum V und eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils das Tensorprodukt $V \otimes V$ und geben Sie die zu b gehörige lineare Abbildung $f_b : V \otimes V \to K$ an.

(a) $V = K^2$ und $b = det$.

Beweis. Wir haben in der Vorlesung bereits gesehen, dass das zugehörige Tensorprodukt durch die 2×2 Matrizen gegeben ist, und $v_1 \otimes v_2 = v_1 \cdot v_2^T$. Entsprechend können wir die Standardbasis $(1,0), (0,1)$ wählen und uns überlegen wie die ensprechende Linearform auf der so entstehenden Basis von $V \otimes V$ wirkt.

Die Basis die man so erhält ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen f_b also auf dieser Basis. Es gilt

$$f_b(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = f_b(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0.$$

Analog erhält man

$$f_b(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 0$$

sowie

$$f_b(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$$

und

$$f_b(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = -1.$$

Es handelt sich bei dieser Linearen Abbildung also keinen Falls um die Determinante. Die Determinante ist nicht einmal linear, da sie Addition nicht respektiert. $\square$

(b) $V = K[x]$ sei der Vektorraum aller Polynome einer Variablen. b sei die Bilinearform definiert durch $b(g,h) := \int_0^1 g(x)h(x)dx$.

Beweis. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $V \otimes V$ durch $K[x,y]$ gegeben ist, und Polynome $(f(x), g(x))$ auf $f(x) \cdot g(y) = f \otimes g$ abgebildet werden. Da die Monome x^n eine Basis für die Polynome sind, erhalten wir als Basis für $K[x,y]$ die Polynome $x^n y^m$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$. Auf dieser Basis wird

$$f_b(x^n y^m) = b(x^n, x^m) = \int_0^1 x^n x^m dx.$$

Da f_b und das Integral linear ist, können wir sogar ganz allgemein feststellen, dass

$$f_b(p(x,y)) = \int_0^1 p(x,x)dx.$$

□

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Es sei V ein K-Vektorraum und $x, y \in V$. Zeigen Sie:

$$x \otimes y = y \otimes x \quad \Leftrightarrow \quad x, y \text{ sind linear abhängig.}$$

Beweis. Angenommen x, y sind linear abhängig. Dann finden wir $\lambda \in K$ mit $x = \lambda y$ und es gilt

$$x \otimes y = \lambda y \otimes y = \lambda(y \otimes y) = y \otimes \lambda y = y \otimes x.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass φ, also $\otimes$ bilinear ist.

Angenommen x, y sind linear unabhängig. Dann können wir x, y zu eine Basis von V erweitern und somit zwei Lineare Abbildungen definieren. Wir definieren $f(x) = 1$ und $f(b_i) = 0$ für alle anderen Basiselemente und $g(y) = 1$ und $g(b_i) = 0$ für alle anderen Basiselemente. Damit ist durch $b(v_1, v_2) = f(v_1)g(v_2)$ eine Bilinarform gegeben. Nach universeller Eigenschaft des Tensorprodukts finden wir also eine eindeutige Lineare Abbildung von $f_b : V \otimes V \to K$ sodass

$$f_b(x \otimes y) = b(x,y) = f(x)g(y) = 1 \neq 0 = f(y)g(x) = b(y,x) = f_b(y \otimes x).$$

Damit nimmt f_b unterschiedliche Werte auf $x \otimes y$ und $y \otimes x$ an und die beiden Tesoren sind somit nicht gleich. □

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mittwoch, den 20.01.2022, um 8.00 Uhr.